۱ جلسه‌ی پنجم

کوییز اول. جملات زیر را در زبانِ $L = \{R(x, y)\}$ فرمولبندی کنید:

۱. هر کس که دوستی داشته باشد که با همه دوست است، حداقل با دو نفر دوست نیست.

پاسخ.

$$\forall x \quad \Big(\exists y \quad \big(R(x,y) \wedge \forall z \quad R(y,z)\big) \rightarrow \exists r, s \quad \big(\neg R(x,r) \wedge \neg R(x,s) \wedge \neg(r=s)\big)\Big)$$

□

۲. اگر هر کس حداقل یک دوست داشته باشد، آنگاه دو نفر هستند که با هم دوست نیستند.

پاسخ.

$$\forall x \quad \exists y \quad R(x,y) \rightarrow \exists z, r \quad \neg R(z,r)$$

□

۱.۱ نظریه‌ی مجموعه‌ها

مجموعه را در ریاضیات دبیرستان به صورت زیر تعریف می‌کنند:

مجموعه، گردایه‌ای است از اشیاء معین و متمایز که دارای ویژگی خاصی هستند.

هر چند همه‌ی ما تعریف بالا را به صورت شهودی می‌توانیم بپذیریم ولی در عین حال باید بپذیریم که عبارتهای **گردایه، شیء، دور هم جمع آمدن** و ... ساده‌تر از خودِ مجموعه نیستند**!** به نظر می‌آید که در تعریف بالا، تنها کلمه‌ی مجموعه با چند کلمه‌ی دیگر جایگزین شده است. شاید این مشکل به ظاهر بزرگ نرسد. در واقع تا اوایل قرن بیستم تعریف شهودی بالا، که آن را به کانتور نسبت می‌دهند، تعریف مورد قبول ریاضیدانان برای مفهوم مجموعه بود. بنابراین از نظر کانتور، اگر $p(x)$ یک ویژگی باشد، هر عبارت به صورت زیر یک مجموعه است:

$$\{x | p(x)\}$$

عبارت بالا، مجموعه‌ی x هائی را نشان می‌دهد که ویژگیِ p را دارا هستند.

در قسمت بعد بررسی کرده‌ایم که مشکل تعریف بالا چه می‌تواند باشد.

۲.۱ پارادوکس راسِل

فرض کنید $p(x)$ ویژگیِ $x \notin x$ باشد:

$$p(x) : x \notin x$$

آنگاه بنا به آنچه در بالا گفتیم، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$A = \{x | x \notin x\}$$

سوال ۱. آیا $A \in A$؟

پاسخ. اگر $A \in A$ آنگاه

$$A \in \{x | x \notin x\}$$

پس $A \notin A$ ↯

پس به نظر می‌آید که A متعلق به A نیست. اما انگار این هم درست نیست: اگر $A \notin A$ آنگاه

$$A \notin \{x | x \notin x\}$$

پس $A \in A$ ↯

رویداد پاردوکس راسل نشان می‌دهد که شهود علمی اولیه ما از مجموعه‌ها، که سالها پایه‌ی بنای کار ریاضیدانان بوده است، شهودی تناقض‌آمیز است. در واقع علم ریاضی، در همین نخستین قدم دچار تناقضی آشکار شده است. از کجا معلوم که سایر بخشهای دیگر ریاضی دچار تناقض نباشند؟ شاید من امروز قضیه‌ای در اتاق کارم ثابت کنم که چند ماه بعد قرار است نقیض آن را اثبات کنم!

از آنجا که علمِ حاویِ تناقض، مطلوب ما نیست، باید برای تعریف مجموعه‌ها، چاره‌ای بجوئیم.

در بخش بعد راهی را که منطق برای رهائی از چنین پارادوکسهائی پیش پای ریاضیدانان گذاشته است معرفی می‌کنیم. پیش از آن در زیر دو نکته را یادآور می‌شویم:

نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور را گاهی نظریه‌ی مجموعه‌ی سهل‌انگارانه [۱] نیز می‌خوانند.

[۱] naive set theory

پارادوکس راسل، که ذهن بسیاری از ریاضیدانان و فیلسوفان را به خود مشغول کرده بود، از نوع پارادوکسهای «ارجاع‌به‌خود» [۲] است. در زیر مثال دیگری از چنین پارادوکسها را آورده‌ایم:

مثال ۲ (پارادوکس دروغگو)**.** فرض کنید شخصی بگوید «من دروغگو هستم». آیا این شخص دروغگو است یا راستگو؟ اگر راستگو باشد، پس راست گفته است که دروغگو است، پس دروغگو است! اگر دروغگو باشد پس دروغ گفته است که دروغگوست، پس راستگوست!

□

۳.۱ روش اصل‌موضوعه‌ای برای تعریف مجموعه

برای رهائی از پارادوکسهائی مانند پاردوکس راسل، ریاضیدانان روش اصل موضوعه‌ای را برای تعریف مجموعه برگزیده‌اند. این روش بر منطق مرتبه‌ی اول استوار است که آن را در جلسات اول معرفی کرده‌ایم.

نخست زبان مرتبه اول زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$L = \{\in\}$$

در روش اصل‌موضوعه‌ای، مجموعه، متغیری مانند $x, y, z, \ldots$ است که از اصول «نظریه‌ی مجموعه‌ها» پیروی کند. همه‌ی این اصول را می‌توان با استفاده از ادوات منطقی می‌توان نوشت و علامت $\in$ نوشت.

بخش اعظمی از ریاضیات امروز بر پایه‌ی **اصول نظریه‌ی مجموعه‌های زرملو ـ فرانکل به علاوه‌ی اصل انتخاب** بنا نهاده شده است. مجموعه‌ی این اصول را ZFC می‌خوانیم. در زیر (و در جلسه‌ی بعد) این اصول را معرفی کرده‌ایم. در طی جلسات آینده، برخی از آنها را به تفصیل بررسی خواهیم کرد و نیز به بررسی این نکته خواهیم پرداخت که آیا در روش اصل موضوعه‌ای هم پارادوکس راسل رخ می‌دهد. توجه کنید که اصول زیر، **از همدیگر نتیجه نمی‌شوند.**

اصول ZFC را در زبان $L = \{\in\}$ و در منطق مرتبه‌ی اول می‌نویسیم:

۱. **اصل وجود:**

[۲] self-reference

بیان غیر رسمی: تهی یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\exists X \quad \forall y \quad \neg(y \in X)$$

از این بعد از نمادِ $X = \emptyset$ به جای فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\forall y \quad \neg(y \in x)$$

پس اصل اول می‌گوید که

$$\exists X \quad X = \emptyset$$

۲. **اصل گسترش:** بیان غیر رسمی: دو مجموعه که اعضای یکسانی داشته باشند، با هم برابرند. بیان رسمی:

$$\forall A, B \quad \Big(\forall x \quad (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B\Big)$$

۳. **اصل تصریح:**

بیان غیر رسمی: اگر بدانیم که A یک مجموعه است آنگاه اگر $p(x)$ یک ویژگی باشد که در منطق مرتبه‌ی اول بیان شده است، آنگاه عبارت زیر نیز یک مجموعه است.

$$\{x \in A | p(x)\}$$

بیان رسمی:

$$\forall A \quad \exists B \quad \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge p(x))$$

در واقع اگر A یک مجموعه باشد، عبارت زیر بنا به اصل تصریح یک مجموعه است.

$$B = \{x \in A | p(x)\}$$

توجه ۳. توجه کنید که در نظریه‌ی مجموعه‌های سهل‌انگارانه، هر عبارتی به صورت زیر را یک مجموعه دانستیم:

$$\{x | p(x)\}$$

در اصل تصریح، یک شرط به بالا اضافه کرده‌ایم: **اگر بدانیم که A یک مجموعه است،** آنگاه عبارت زیر نیز یک مجموعه است:

$$\{x \in A | p(x)\}.$$

۴. **اصل جفت‌سازی:**

بیان غیر رسمی: اگر x و y دو مجموعه باشند، آنگاه $\{x,y\}$ یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\forall x,y \quad \exists A \quad \Big(\forall z \quad z\in A \leftrightarrow (z=x \vee z=y)\Big)$$

۵. **اصل اجتماع:**

بیان غیر رسمی: هر اجتماعی از مجموعه‌ها خود یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\forall A \quad \exists U \quad \forall x \quad \Big(x\in U \leftrightarrow \exists B \quad B\in A \wedge x\in B\Big)$$

اگر U مجموعه‌ی بالا باشد، می‌نویسیم:

$$U=\bigcup A$$

مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\{A_۱,A_۲,A_۳\} \quad U=\bigcup A = A_۱\cup A_۲\cup A_۳$$

$$x\in U \leftrightarrow (x\in A_۱)\vee(x\in A_۲)\vee(x\in A_۳)$$

مثال ۴. یکی از دانشجویان پرسید که فرق بین اصل جفت‌سازی و اصل اجتماع چیست. در زیر این تفاوت آشکار است:

$$x=\{۱,۲,۳\}$$

$$y=\{۴,۵,۶\}$$

$$x\cup y=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$\{x,y\}=\{\{۱,۲,۳\},\{۴,۵,۶\}\}$$

۶. **اصل مجموعه‌ی توان:**

بیان غیر رسمی: اگر A یک مجموعه باشد، گردایه‌ی تمام زیر مجموعه‌های آن نیز یک مجموعه است. بیان رسمی:

$$\forall A \quad \exists B \quad \left(\forall x \quad x\in B \leftrightarrow \Big(\forall z \quad \underbrace{(z\in x \to z\in A)}_{x\subseteq A}\Big)\right)$$

توجه ۵. برای یک مجموعه‌ی A، گردایه‌ی تمام زیر مجموعه‌هایش را (که بنا به اصل بالا یک مجموعه است) با $P(A)$ نشان می‌دهیم:

$$P(A) = \{B|B \subseteq A\}$$

۷. **اصل جانشانی** [۳]:

برای این اصل، به بیان غیر رسمی بسنده می‌کنیم. بیان غیر رسمی: **تصویر** یک مجموعه تحت یک **تابع تعریف‌پذیر** ، مجموعه است. پرداختن به معنی «تابع تعریف‌پذیر» جزو اهداف این درس نیست. دانشجوی علاقه‌مند می‌تواند با این مفهوم در درس «منطق» آشنائی پیدا کند.

۸. **اصل انتظام:**

$$\forall X \quad \Big(X \neq \emptyset \to \exists z \quad z \in X \quad z \cap X = \emptyset\Big)$$

در جلسه‌ی بعد این اصل را توضیح خواهیم داد و به باقی اصول نیز خواهیم پرداخت.

[۳] replacement