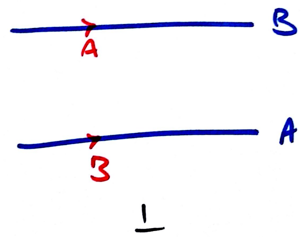
۱ جلسه‌ی بیست و هشتم، دوشنبه

در جلسه‌ی قبل درباره‌ی اصل خوشترتیبی صحبت کردیم. گفتیم که بنا به این اصل اگر A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد آنگاه می‌توان یک رابطه‌ی ترتیبی $\leqslant_A$ روی A تعریف کرد به طوری که $(A, \leqslant_A)$ خوشترتیب باشد.

تمرین ۱. نشان دهید که ساختار $(A, \leqslant)$ خوش ترتیب است اگر و تنها اگر هیچ دنباله‌ی نزولیِ نامتناهی‌ای مانند دنباله‌ی زیر از اعضای A یافت نشود.

$$a_۱ \geqslant_A a_۲ \geqslant_A a_۳ \geqslant_A \dots$$

اصل خوشترتیبی مقدمه‌ی مقوله‌ی مهم دیگری در نظریه‌ی مجموعه‌ها، به نام اُردینالها است. قصد ندارم وارد مبحثِ اردینالها شوم، ولی توضیحی چند درباره‌ی آنها می‌دهم. به معرفی عمیقتر آنها را در درس منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها در ترم آینده خواهم پرداخت.
گفتیم که بنا اصل خوشترتیبی هر مجموعه‌ای را می‌توان دارای ترتیبی فرض کرد که با آن ترتیب خوشترتیب باشد. اگر $(A, \leqslant_A)$ و $(B, \leqslant_B)$ خوش ترتیب باشند آنگاه (بنا به قضیه‌ای)یا A بخشی آغازین از B است یا B بخشی آغازین از A است.



منظور از این که A بخش آغازینِ B است، عبارت زیر است:

$$\exists y \in B \quad A = \{x | x \leqslant y\}$$

پس مجموعه‌های خوشترتیب همه مانند اعداد پشت سر هم قابل مرتب شدن‌اند. به اعدادی که از این طریق حاصل می‌شوند، اعداد ترتیبی، یا **اردینالها** گفته می‌شود. برخی از اردینالها را در زیر نوشته‌ام.

$$۰, ۱, ۲, \dots, \omega, \omega + ۱, \omega + ۲, \dots, \omega + \omega, \omega + \omega + \omega, \dots, \omega.\omega, \omega.\omega + ۱, \dots, \omega.\omega + \omega, \dots, \omega^۳, \dots, \omega^\omega, \dots$$

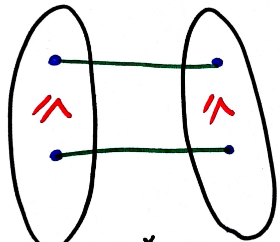
دقت کنید که اردینالهای $\omega, \omega + ۱, \omega + ۲, \dots, \omega + \omega$ و بسیاری اردینالهای دیگر بعد از آن، از لحاظ کاردینالی همه برابر با $\aleph_۰$ هستند. به بیان دیگر اگر ترتیب روی آنها در نظر گرفته نشود، همه، هم‌اندازه با $\aleph_۰$ هستند. اما وقتی پای ترتیب به میان می‌آید، $\omega + ۱$ دارای عنصری است که از همه‌ی عناصرِ ω بزرگتر است؛ پس $\omega + ۱$ از لحاظ اردینالی با ω برابر نیست. حساب اردینالها داستان مفصل خود را دارد: روی آنها هم جمع و ضرب و توان تعریف می‌شود و این اعمال، با آنهائی که برای کاردینالها تعریف کردیم کاملاً متفاوتند. در زیر، تعریف دقیقتری برای اردینالها ارائه کرده‌ام.

تعریف ۲. اگر X و Y دو مجموعه باشند می‌گوییم X و Y یک اُردینال یکسان هستند (یا دارای نوع ترتیبیِ یکسانند) هر گاه

$$\exists \quad \overset{\text{یک به یک و پوشا}}{\overset{\uparrow}{f}} \quad : (X, \leqslant_X) \to (Y, \leqslant_Y)$$

به طوری که

$$\forall x, x' \in X \quad \Big(x \leqslant_X x' \to f(x) \leqslant_Y f(x')\Big)$$



۲

پس این که دو مجموعه دارای نوع ترتیبی یکسان هستند، یعنی هم تعداد اعضای آنها برابر باشند و هم ترتیب اعضا یکسان باشد. تعریف بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی به دست می‌دهد که هر کلاس رابطه‌ی بالا را یک **اُردینال** می‌نامیم. بیش از این درباره‌ی اردینالها سخن نمی‌گویم و به عنوان آخرین بخش این درس، به بررسی اعداد طبیعی خواهم پرداخت.

۱.۱ اعداد طبیعی

اعداد طبیعی برای افراد در هر سطحی از ریاضی، قابل فهمند. اما برای ریاضیدان، دانستن سرمنشأ آنها و آگاهی درباره‌ی امکان اصل‌بندی آنها ضروری است. سایر مجموعه‌های اعداد، مانند اعداد صحیح و اعداد گویا و اعداد حقیقی همه با شروع از اعداد طبیعی تعریف می‌شوند. پس استحکام دانشمان از اعداد طبیعی برای حساب لازم است. همچنین اعداد طبیعی موضوع شاخه‌ای از ریاضیات به نام «نظریه‌ی اعداد» هستند.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی، همانند آنچه در ابتدای درس گفتیم، از طریق اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها به صورتی که در ادامه گفته‌ایم تعریف می‌شود. یادآوری می‌کنم که **اصل وجود مجموعه‌ی استقرایی** به صورت زیر است:

$$\exists A \quad (\emptyset \in A \wedge \forall x \in A \quad x \cup \{x\} \in A)$$

اصل بالا را **اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی** نیز می‌نامند. پس بنا به این اصل حداقل یک مجموعه‌ی استقرایی موجود است. این مجموعه، بنا به اصل بالا، حداقل شامل عناصر زیر است:

$$\emptyset$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\}$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}\}$$

$$\cdots$$

تعریف ۳. منظور از یک عدد طبیعی مجموعه‌ای (عنصری) است که به همه‌ی مجموعه‌های استقرائی تعلق دارد.

لم ۴. گردایه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی، یک مجموعه است. (که آن را با $\mathbf{N}$ نشان می‌دهیم.)

اثبات. باید نشان دهیم که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با استفاده از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها قابل تعریف است. فرض کنید B یک مجموعه‌ی استقرائی باشد. چنین مجموعه‌ای بنا به اصل وجود مجموعه‌ی استقرائی وجود دارد. گردایه‌ی اعداد طبیعی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\mathbf{N} = \{x \in B | \forall A \quad (\underbrace{A \text{ استقرائی}}_{\emptyset \in A \wedge \forall t \in A \quad t \cup \{t\} \in A} \rightarrow x \in A)\}$$

در تعریف بالا از اصل تصریح و منطق مرتبه‌ی اول استفاده شده است. پس آنچه در بالا تعریف شده است، یک مجموعه است. $\square$

در بالا در واقع گفته‌ایم که

$$\mathbf{N} = \bigcap_{A\ \text{استقرائی}} A$$

تمرین ۵. نشان دهید که $\mathbf{N}$ خودْ مجموعه‌ای استقرائی است.

بنا به تمرین بالا و آنچه پیش از آن گفتیم، $\mathbf{N}$ در واقع **کوچکترین مجموعه‌ی استقرائی** است. زیرا هم استقرائي است و هم زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌های استقرائی است. پس $\mathbf{N}$ مجموعه‌ی زیر است:

$$\mathbf{N} = \{\overset{۰}{\emptyset}, \overset{۱}{\emptyset \cup \{\emptyset\}}, \underbrace{\overset{۲}{\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}}}_{A}, A \cup \{A\}\}, \ldots$$

اعضای مجموعه‌ی بالا را می‌توانیم به صورت همان اعداد آشنای طبیعی نشان دهیم. اما می‌دانیم که اعداد طبیعی فقط یک مجموعه‌ی صِرف نیستند. آنها را می‌توان با هم جمع و ضرب کرد. در زیر روش تعریف اعمال اصلی را توضیح داده‌ام.

تعریف ۶. روی $\mathbf{N}$ تابع S (تابع تالی) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

$$S(x) = x \cup \{x\}$$

به بیان دیگر، تابع تالی، همان تابعی است که عمل زیر را انجام می‌دهد:

$$x \mapsto x + ۱$$

قضیه ۷ (استقراء)**.** فرض کنید $B \subseteq \mathbf{N}$ و $۰ \in B$ و برای هر $x \in B$ داشته باشیم $S(x) \in B$ آنگاه

$$B = \mathbf{N}$$

اثبات. بنا به شرایط بالا، B یک مجموعه‌ی استقرائی است. پس $\mathbf{N} = \bigcap_{A\ \text{استقرائی}} A \subseteq B$. از طرفی $B \subseteq \mathbf{N}$ پس $B = \mathbf{N}$. $\square$

حال با استفاده از استقراء جمع و ضرب را روی اعداد طبیعی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۸. ۱. (جمع اعداد طبیعی)

فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. تعریف می‌کنیم

$$n + ۱ = S(n)$$

فرض کنید $n + m$ تعریف شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$n + (m + ۱) = (n + m) + ۱ = S(n + m)$$

۲. (<u>ضرب اعداد طبیعی</u>) فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. تعریف می‌کنیم:

$$n \times ۰ = ۰$$

فرض کنید $m \times n$ تعریف شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$n \times (m + ۱) := n \times m + n$$

۳. (<u>ترتیب اعداد طبیعی</u>)

$$x \leqslant y \iff \exists z \quad y = x + z$$

در نظریه‌ی اعداد قضایای بی‌شماری درباره‌ی اعداد طبیعی ثابت شده است. آیا می‌توان مجموعه‌ای از اصول اولیه برای اعداد طبیعی نوشت، به طوری که همه‌ی آن قضایا از اصول یادشده نتیجه شوند؟ سوال بالا را در ادامه‌ی درس در ذهن داشته باشید.

۲.۱ اصول پئانو

تعریف ۹. سه‌تایی (X, a, S_X) را **یک مدل برای حساب پئانو** می‌نامیم هرگاه X یک مجموعه باشد، $S_X : X \to X$ یک تابع باشد و a یک عنصر مشخص در X باشد و (X, a, S_X) در اصول زیر صدق کند.

۱. $\forall x \in X \quad S_X(x) \neq a$

۲. $\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad S_X(x) \neq S_X(y)$

۳. $\forall A \subseteq X \quad (a \in A \wedge \forall x \in A \quad S_X(x) \in A \to A = X)$ (استقراء)

بنا به آنچه در قسمت قبل گفتیم، سه‌تائیِ $(\mathbf{N}, ۰, S)$ مدلی برای حساب پئانو است زیرا در تمام اصول بالا صدق می‌کند. آیا حساب پئانو، دقیقاً مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به دست می‌دهد؟ آیا حساب پئانو مدل دیگری غیر از اعداد طبیعی دارد؟

قضیه ۱۰. (با در نظر گرفتن ایزومرفیسم) $(\mathbf{N}, ۰, S)$ تنها مدل حساب پئانو است.

اثبات. می‌دانیم که $(\mathbf{N}, ۰, S)$ یک مدل برای حساب پئانو است. فرض کنید (X, a, S_X) مدل دیگری باشد. تابع زیر را با استفاده از استقراء از $\mathbf{N}$ به X تعریف می‌کنیم:

$$f : \mathbf{N} \to X$$

$$f(۰) = a$$

فرض کنید $f(n)$ تعریف شده باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(n + ۱) = S_X\Big(f(n)\Big)$$

ادعا: تابع f پوشاست.

اثبات ادعا: فرض کنید B بُرد تابعِ f باشد. پس $B \subseteq X$. داریم:

۱. $f(\text{۰}) = a \in B$

۲. اگر $t = f(x) \in B$ آنگاه

$$S_X(t) = f(x + \text{۱}) \in B$$

پس $B \subseteq X$ و B در شرط اصل سوم پئانو صدق می‌کند. بنابراین

$$B = X$$

ادعای دوم. f یک به یک است.

اثبات ادعا: فرض کنید $n, m \in \mathbf{N}$ و $n \gneqq m$ آنگاه $n = S^n(\text{۰}), m = S^m(\text{۰})$ و

$$f(m) = S_X^m(a) \text{ و } f(n) = S_X^n(a)$$

تمرین ۱۱. نشان دهید که

$$S_X^m(a) \neq S_X^n(a)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & S(\text{۰}) & S^{\text{۲}}(\text{۰}) & \ldots \\ \mathbf{N} & \text{۰} & \text{۱} & \text{۲} & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ X & a & S_X(a) & S_X^{\text{۲}}(a) & \ldots \end{array}$$

پس تابع بالا هم یک به یک است و هم پوشا. بنابراین تنها یک مدل برای حساب پئانو وجود دارد و آن $(\mathbf{N}, \text{۰}, S)$ است. (یعنی هر مدل دیگری که وجود داشته باشد، یکی کُپی از همین مدل است) □

شاید اتفاق بالا خوشحالتان کرده باشد: اعداد طبیعی دارای اصلبندی است. اما اصول پئانو در زبان مرتبه‌ی اول نوشته نشده‌اند. در اصل سوم روی زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی سور زده شده است که این کار در منطق مرتبه‌ی اول مجاز نیست. (بنا به ویژگیهای مهم منطق مرتبه‌ی اول) مهم است که بدانیم که آیا می‌شود مجموعه‌ای از اصول برای اعداد طبیعی در منطق مرتبه‌ی اول نوشت، به طوری که هر قضیه‌ای درباره‌ی اعداد طبیعی در منطق مرتبه‌ی اول از آنها نتیجه شود؟ از پسِ پاسخ این سوال، «گودل» [۱] منطقدانِ آلمانی برآمده است. بر خلاف آنچه انتظار طبیعی ریاضیدانان است، گودل ثابت کرده است که هر مجموعه‌ی (شمارا) از اصول که برای اعداد طبیعی نوشته شود، از پس اثبات همه‌ی حقایق اعداد طبیعی برنمی‌آید؛ یعنی همواره قضیه‌ای درباره‌ی اعداد طبیعی پیدا می‌شود که با این اصول، نه ثابت می‌شود و نه رَد. این قضیه‌ی مهم، **قضیه‌ی ناتمامیت گودل** نام دارد.

قضیه‌ی ناتمامیت گودل شاید برایتان ناراحت‌کننده باشد:نمی‌شود ریاضیات را به طور کامل اصلبندی کرد و مطمئن بود که همه‌چیز از اصول خاصی نتیجه می‌شوند. در واقع حتی معلوم نیست که ریاضیات (و از این رو علم) حاوی تناقض باشد یا نه، و خالی بودن ریاضیات از تناقضات نیز قابل اثبات نیست. در عین حال، اگر مجموعه‌ای از اصول برای ریاضیات (مثلا اصول زرملو فرانکل) در نظر بگیریم، آنگاه هر چه که با این اصول اثبات می‌کنیم درست است. پس اثباتهائی که داریم درستند. این نتیجه‌ای از **قضیه‌ی درستی و تمامیت گودل** است.

[۱] Gödel

۳.۱ نتیجه‌گیری

در طی این ترم، با مبانی ریاضیات آشنا شدیم. در هِرَمِ علوم، مبانی ریاضیات در پائینترین قسمت واقع است. منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها، علومیند که ریاضیات محض بر پایه‌ی آنها بنا شده است. سایر شاخه‌های ریاضی محض، ماند جبر، هندسه، آنالیز، توپولوژی و غیره در طبقه‌ای بالاتر در این هرم واقعند. عموماً آنچه در ریاضیات محض بررسی می‌شود مسائل خام ریاضی هستند که شاید حل آنها مستقیماً کاربردی در زندگی روزمره نداشته باشد، بلکه پاسخ آنها باید در هرم علوم بالا برود تا به کاربرد برسد. ریاضی محض از این حیث، به فلسفه می‌ماند که در آن دغدغه‌ی یافتن حقیقت بر همه چیز مقدم است. در پله‌ی بالاتر این هرم به ریاضیات کاربردی می‌رسیم که در آن، از قضایائی که در پائین هرم، در ریاضیات محض ثابت می‌شود، استفاده‌های کاربردی می‌کنیم و قضایایی (شاید با عمق کمتر ولی با کاربرد بیشتر) بدانها می‌افزائیم. در ریاضی کاربردی، مسئله‌ی پیش روی ما، عموماً مسئله‌ای است که به جهانی که در آن زندگی می‌کنیم می‌پردازد و حل آن قرار است به درد طبقه‌های بالاتر هرم بخورد. عموماً این مسائل خودشان نیز از طبقات بالاتر هرم می‌آیند. در این طبقات، انواع مهندسی‌ها واقع شده‌اند. آنچه برای مهندس بیش از همه‌چیز اهمیت دارد، پاسخ دادن به سوالی است که پاسخ آن موجب چرخش چرخ صنعت شود. شاید از این حیث، مهندس کمتر وقتش را صرف دانستن کُنهِ فلسفی سوالی بکند. مسئله برای او زمانی حل است که مشکل صنعت را حل کند.

به عنوان تمرین، هرم علوم را برای خود رسم کنید و بررسی کنید که علومی مانند پزشکی، جامعه‌شناسی، جغرافیا و فیزیک در کجای این هرم می‌توانند واقع شوند. دقت کنید که برخی از این علوم می‌توانند به چند طبقه‌ی مختلف از هرم تعلق داشته باشند.