۱ کاردینالها، ج بیست و ششم

پیش از آنکه وارد بحث کاردینالها شویم، بیایید آنچه را که تا کنون یادگرفته‌ایم به سرعت مرور کنیم. گفتیم که در درس مبانی ریاضی قرار است که علم ریاضی را از اصول اولیه و پایه‌ای آن دوباره معرفی کنیم. برای این کار نخست به زبان این علم نیازمندیم که همان منطق است. با دو نوع منطق آشنا شدیم:

۱. منطق گزاره‌ها (جبر بولی)

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$$

در این منطق، گزاره‌ها تنها دارای ارزش درست و غلط هستند و ارزش گزاره‌های پیچیده‌تر با استفاده از جدول ارزش مشخص می‌شود.

۲. منطق مرتبه‌ی اول (منطق محمولات) که از افزودن دو علامت

$$\forall x \exists y$$

به منطق گزاره‌ها به دست می‌آید. گفتیم که عمده‌ی ریاضیات (به ویژه نظریه‌ی مجموعه‌ها)بر پایه‌ی این منطق بنا شده است.

در زیر چند نمونه جمله‌نویسی در این منطق را دوباره با هم تمرین می‌کنیم:

مثال ۱. ۱. هر کسی عموئی دارد.

$$\forall x \quad \exists y \quad A(y,x)$$

۲. کسی هست که عموی همه است.

$$\exists y \quad \forall x \quad A(y,x)$$

۳. اگر همه‌ی افراد عمو داشته باشند، همه‌ی افراد دائی دارند.

$$\forall x \quad \exists y \quad A(y,x) \rightarrow \forall x \quad \exists y \quad D(y,x)$$

۴. هر کسی که عمو داشته باشد، دائی دارد.

$$\forall x \quad \big(\exists y \quad A(y,x) \to \exists z \quad D(x,y)\big)$$

پس از آن وارد بحث نظریه‌ی مجموعه‌ها شدیم. همه‌ی پدیده‌های ریاضی مانند تابع، رابطه، گروه، میدان و غیره منشأ نظریه‌ی مجموعه‌ای دارند. بنابراین لازم است که ریاضی‌دان تکلیف خود را نخست با مجموعه معلوم کند.
گفتیم که تعریف شهودی ساده‌انگارانه برای مجموعه‌ها، ما را به تناقض راسل دچار می‌کند. از این رو به رویکرد اصل‌موضوعه‌ای برای مجموعه‌ها روی آوردیم. در این رویکرد، مجموعه یک متغیرِ $x, y, z, \ldots$ است که از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها پیروی کند. اصول زدافسی را به عنوان اصول پذیرفته شده برای مجموعه ها معرفی کردیم.
یکی از این اصول، **اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی** بود. گفتیم که به محض پذیرفتن این اصل، متوجه می‌شویم که اگر نامتناهی وجود داشته باشد، نامتناهی‌ها نیز اندازه‌های متفاوتی خواهند داشت. در ادامه‌ی درس می‌خواهیم این گفته را بیشتر توضیح دهیم.

۱.۱ کاردینالها یا اعداد اصلی

روی کلاس همه‌ی مجموعه‌ها رابطه‌ی زیر را تعریف می‌کنیم.

$X \cong Y \iff$ یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد.

ویژگی‌های رابطه‌ی $\cong$:

۱.

$$\forall X \quad X \cong X$$

تابع همانی از X به X یک به یک و پوشاست.

۲.

$$\forall X, Y \quad (X \cong Y \to Y \cong X)$$

اگر $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد آنگاه $f^{-1} : Y \to X$ یک به یک و پوشاست.

۳.

$$\forall X, Y, Y \quad (X \cong Y \wedge Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z)$$

فرض کنید توابع $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ یک به یک و پوشا باشند. آنگاه $gof : X \to Z$ یک به یک و پوشاست. (ثابت کنید.) پس رابطه‌ی $\cong$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. از این رو، این رابطه، کلاس همه‌ی مجموعه‌ها را افراز می‌کند:

$\dots$	$[Y]$	$[X]$	$\dots$

تعریف ۲. کلاس هر مجموعه‌ی X را در رابطه‌ی هم‌ارزی بالا با $\mathbf{card}X$ نشان می‌دهیم و هر کلاس در بالا را یک **کاردینال** می‌نامیم. پس هرگاه بگوئیم $\mathbf{card}X$ برابر است با $\mathbf{card}Y$ یعنی

$$X \cong Y$$

کلاسهای هم‌ارزی رابطه‌ی بالا به صورت زیر هستند:

۱. کلاس مجموعه‌ی تهی که آن را با ۰ نشان می‌دهیم.

۲. کلاس همه‌ی مجموعه‌های تک عضوی که آن را با ۱ نشان می‌دهیم.

۳. $\vdots$

۴. کلاس همه‌ی مجموعه‌های n عضوی که آن را با n نشان می‌دهیم.

۵. کلاس همه‌ی مجموعه‌های شمارا، مانند $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ که آن را با $\aleph_0$ نمایش می‌دهیم.

۶. اگر فرضیه‌ی پیوستار درست باشد، اولین کلاس بعدی، کلاس مجموعه‌های هم‌اندازه‌ی اعداد حقیقی است.

۷. تعداد این کلاسها نامتناهی است. اگر A در یک کلاس واقع شده باشد آنگاه $P(A)$ در کلاسی متفاوت واقع است.

۲.۱ حساب کاردینالها

منظور از حساب کاردینالها، بررسی اعمال اصلی و ترتیب روی آنهاست. فرض کنید α و β دو کاردینال باشند و فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ و $\beta = \mathbf{card}(Y)$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha \leqslant \beta \iff \exists \overset{\text{یک به یک}}{\overset{\uparrow}{f}} : X \to Y$$

دقت کنید که رابطه‌ی ترتیب در بالا، خوش‌تعریف است؛ یعنی با انتخاب مجموعه‌های X, Y بستگی ندارد. در زیر این گفته را اثبات کرده‌ایم.

اثبات. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(X')$ و $\beta = \mathbf{card}(Y) = \mathbf{card}(Y')$ و فرض کنید $f : X \to Y$ یک به یک است.

$$X' \cong X \to Y \cong Y'$$

بنابراین

$$X' \leq Y' \Leftrightarrow X \leq Y.$$

$\square$

۱.۲.۱ ترتیب کاردینالها

رابطه‌ی $\leq$ در بالا واقعاً یک رابطه‌ی ترتیبی است؛ یعنی ویژگی‌های زیر را داراست:

.۱

$$\forall \alpha \quad \alpha \leqslant \alpha$$

.۲

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \quad (\alpha \leqslant \beta \wedge \beta \leqslant \gamma \to \alpha \leqslant \gamma)$$

برای اثبات فرض کنید

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

$$\gamma = \mathbf{card}(Z)$$

و دیاگرام زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

۳. اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\beta \leqslant \alpha$ آنگاه $\alpha = \beta$. (قضیه‌ی کانتور_ برنشتاین)

۱.۲.۲ جمع کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند. فرض کنید $\alpha = \mathbf{card}(X)$ ، $\beta = \mathbf{card}(Y)$ و $X \cap Y = \emptyset$. آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \mathbf{card}(X \cup Y)$$

دقت کنید که تعریف بالا نیز به انتخاب X, Y بستگی ندارد.

۱. در جلسات گذشته ثابت کرده‌ایم که

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$[n] + [m] = n + m$$

۲. اگر $\alpha \lneqq \aleph_0$ آنگاه $\exists n \in \mathbf{N}$ به طوری که $\alpha = n$. مجموعه‌ی زیر ماکزیمم ندارد.

$$\{\alpha | \alpha \lneqq \aleph_0\}$$

اگر $\alpha < \aleph_0$ آنگاه α را متناهی و اگر $\alpha \geqslant \aleph_0$ آنگاه α را نامتناهی می‌نامیم.

۳.۲.۱ ضرب کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند به طوری که

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$\alpha \times \beta = \mathbf{card}(X \times Y)$$

توجه ۳.

$$\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$$

علت:

$$X \times Y \xrightarrow{h} Y \times X$$

$$h(x, y) = (y, x)$$

مثال ۴. ثابت کنید $\alpha \times ۱ = \alpha$.

اثبات.

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\alpha \times ۱ = \mathbf{card}(X \times ۱) = \mathbf{card}(X) \times \{a\}$$

کافی است نشان دهیم که

$$\underbrace{X \times \{a\}}_{\{(x,a) | x \in X\}} \cong X$$

تابع زیر ما را به هدف می‌رساند:

$$(x, a) \mapsto x$$

$\square$

لم ۵. اگر $\alpha \leqslant \beta$ و $\gamma \leqslant \lambda$ آنگاه

$$\alpha \times \gamma \leqslant \beta \times \lambda$$

فرض کنید

اثبات.

$$\alpha = \mathbf{card}(X)$$

$$\beta = \mathbf{card}(Y)$$

$$\gamma = \mathbf{card}(Z)$$

$$\lambda = \mathbf{card}(W)$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$Z \xrightarrow{g} W$$

آنگاه تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$h : X \times Z \to Y \times W$$

$$(x, z) \mapsto \big(f(x), g(z)\big)$$

$\square$

مثال ۶. در جلسات قبل ثابت کردیم که

$$\aleph_0 \times 1 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \times n = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

در اینجا برای مورد آخر، اثبات دیگری ارائه می‌کنیم.

اثبات. می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \cong \mathbf{N}$$

با استفاده از قضیه‌ی کانتور برنشتاین کافی است نشان دهیم

$$\mathbf{N} \leqslant \mathbf{N} \times \mathbf{N} \tag{1}$$

$$\text{(۲)} \quad \mathbf{N} \times \mathbf{N} \leqslant \mathbf{N}$$

اثبات اولی.

$$\mathbf{N} \xrightarrow{f} \mathbf{N} \times \mathbf{N}$$

$$n \mapsto (n, n)$$

بررسی کنید که تابع بالا یک به یک است. اثبات دومی.

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

$$(n, m) \mapsto ۲^n \times ۳^m$$

بررسی کنید که تابع بالا یک به یک است. بنابراین

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \cong \mathbf{N}$$

یعنی

$$\aleph_۰ \times \aleph_۰ = \aleph_۰$$

□

۴.۲.۱ توان کاردینالها

فرض کنید α, β دو کاردینال باشند و $\alpha = \mathbf{card}(X), \beta = \mathbf{card}(Y)$. تعریف می‌کنیم

$$\alpha^\beta = \mathbf{card}\big(X^Y\big).$$

یادآوری می‌کنیم که X^Y مجموعه‌ی تمامی توابع از Y به X است.

اگر $\alpha = \mathbf{card}(X)$ آنگاه

$$۲^\alpha = \mathbf{card}(\{۰, ۱\}^X)$$

در جلسات قبل ثابت کردیم که

$$\mathbf{card}(\{۰, ۱\}^X) = \mathbf{card}\big(P(X)\big)$$

پس

$$۲^{\alpha} = \mathbf{card}\big(P(X)\big)$$

همچنین در جلسات قبل ثابت کرده‌ایم که

$$|\mathbf{R}| = |(a,b)| = |(۰,۱)| = ۲^{\aleph_۰} = |P(\mathbf{N})|$$

توجه ۷. در جلسات قبل قضیه‌ی کانتور را ثابت کردیم که می‌گفت $|P(X)| > |X|$ پس به بیان کاردینالی داریم:

$$۲^{\alpha} > \alpha$$

مانند اعداد طبیعی، توانرسانی کاردینالها با جمع و ضرب آنها سازگار است:

قضیه ۸.

$$\alpha^{\beta} \times \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$$

به بیان دیگر

$$X^{Y} \times X^{Z} \cong X^{Y \cup Z}$$

(با فرض اینکه $Y \cap Z = \emptyset$)

اثبات.

هدف ۹. پیدا کردن یک تابع یک به یک و پوشا (که نامش را H گذاشته‌ایم) از $X^{Y} \times X^{Z}$ به $X^{Y \cup Z}$.

دامنه‌ی تابع H قرار است به صورت زیر باشد.

$$Dom(H) = \{(f,g) | f : Y \to X, g : Z \to X\}$$

هدف ۱۰. تعریف $H(f,g)$.

قرار است $H(f,g) \in X^{Y \cup Z}$ یعنی

$$H(f,g) : Y \cup Z \to X$$

پس $H(f,g)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$H(f,g)(t) = \begin{cases} f(t) & t \in Y \\ g(t) & t \in Z \end{cases}$$

به بیان خلاصه‌تر

$$H(f,g) : Y \cup Z \to X$$

$$(f,g) \mapsto H(f,g)$$

$$H(f,g)(t) = \begin{cases} f(t) & t \in Y \\ g(t) & t \in Z \end{cases}$$

بررسی یک به یک و پوشا بودن تابع بالا به عهده‌ی شما. $\square$

تمرین ۱۱. • تعداد توابعِ از $\mathbf{N}$ به $\mathbf{N}$ را بیابید. (به بیان دیگر حاصلِ $\aleph_0^{\aleph_0}$ را محاسبه کنید.)

- یکبار با استفاده از قوانین ضرب کاردینالها و یکبار به طور مستقیم نشان دهید که

$$\mathbf{N} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R} \qquad \mathbf{R} \times \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$$

- نشان دهید که هر اجتماع شمارا از مجموعه‌های متناهی، شماراست.

- نشان دهید که مجموعه‌ی اعداد گویا شماراست.