۱ جلسه‌ی بیست و چهارم، شنبه

۱.۱ مجموعه‌های مرتب

در جلسه‌ی قبل با مجموعه‌های مرتب آشنا شدیم. یادآوری می‌کنم که:

تعریف ۱. مجموعه‌ی X را به همراه رابطه‌ی $\leqslant$ یک مجموعه‌ی مرتب می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad x \leqslant x$$

$$\forall x, y \in X \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant x \rightarrow x = y$$

$$\forall x, y, z \in X \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant z \rightarrow x \leqslant z$$

وقتی می‌گوییم $(X, \leqslant)$ مرتب جزئی است یعنی جمله‌ی زیر در آن لزوماً درست نیست.

$$\forall x, y \in X \quad x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

یعنی هر دو عضو داده شده، لزوماً با هم قابل مقایسه نیستند.

دقت کنید که معمولاً یک رابطه‌ی ترتیب را با علامت $\leq$ نشان می‌دهیم، ولی منظورمان این نیست که اعضای مجموعه، عدد هستند. اعضای مجموعه می‌توانند هر چیزی باشند و رابطه‌ی $\leq$ فقط باید دارای ویژگی‌های انعکاسی، پادتقارنی و تعدی باشد.

مثال ۲. روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$x \overset{\bullet}{\leqslant} \leftrightarrow x|y$$

سوال ۳. نشان دهید رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی ترتیبی است.

پاسخ. می‌دانیم که

$$(۱)\ \forall x \in \mathbf{N} \quad x|x$$

$$(۲)\ \forall x, y \in \mathbf{N} \quad x|y \wedge y|x \rightarrow x = y$$

$$(۳)\ \forall x, y, z \in \mathbf{N} \quad x|y \wedge y|z \rightarrow x|z$$

پس | (عاد کردن) یک رابطه‌ی ترتیبی است.

توجه ۴. داریم ۱۳ $\overset{\bullet}{\not\leqslant}$ ۲ زیرا ۱۳∤۲ و همچنین ۲ $\overset{\bullet}{\not\leqslant}$ ۱۳ زیرا ۲∤۱۳.
پس رابطه‌ی ترتیبی فوق خطی (تام) نیست.

□

مثال ۵. فرض کنید X یک مجموعه باشد. روی $P(X)$ رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$A \leqslant B \iff A \subseteq B$$

ادعا: $(P(X), \subseteq)$ یک مجموعه‌ی مرتب است.

پاسخ. می‌دانیم که عبارتهای زیر درستند:

$$\forall A \in P(X) \quad A \subseteq A$$

$$\forall A, B \in P(X) \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A \to A = B$$

$$\forall A, B, C \in P(X) \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C$$

پس رابطه‌ی فوق یک رابطه‌ی ترتیبی است.

فرض کنیم X دارای دو عضو a, b باشد که $a \neq b$ آنگاه

$$\{a\} \nsubseteq \{b\}$$

$$\{b\} \nsubseteq \{a\}$$

پس $(P(X), \subseteq)$ مرتب خطی نیست. □

مثال ۶. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. قرار دهید

$$\mathcal{A} = \text{مجموعه‌ی همه‌ی توابع جزئی از } Y \text{ به } X$$

به بیان دیگر تابع f در $\mathcal{A}$ است هرگاه دامنه‌ی آن زیرمجموعه‌ای از Y و برد آن زیرمجموعه‌ای از X باشد. می‌خواهیم روی $\mathcal{A}$ یک رابطه ی ترتیبی تعریف کنیم. فرض کنید $f, g \in \mathcal{A}$. تعریف کنید

$$f \leqslant g \iff dom(f) \subseteq dom(g) \wedge \underbrace{g|_{dom(f)} = f}_{\text{تحدید توابع}}$$

به بیان دیگر می گوئیم تابع f از تابع g کمتر است هرگاه دامنه‌ی آن زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی g باشد و تابع g تعمیمی از تابع f باشد (یعنی

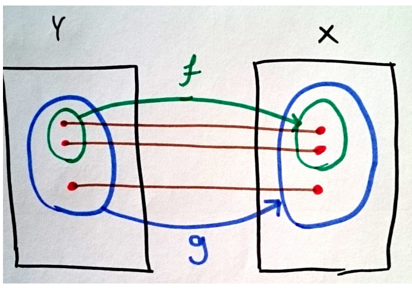
$$\forall x \in dom(f) \quad f(x) = g(x).$$

) به بیان دیگر تابع f از تابع g کمتر است هرگاه

$$\Gamma f \subseteq \Gamma g$$

یادآوری می‌کنم که

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)|x \in dom(f)\}.$$



مثلاً اگر $\Gamma f = \{(a, b), (c, d)\}$ آنگاه g می‌تواند به صورت زیر باشد

$$\Gamma g = \{(a, b), (c, d), (h, k)\}$$

تمرین ۷. نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی ترتیبی است ولی لزوماً خطی نیست.

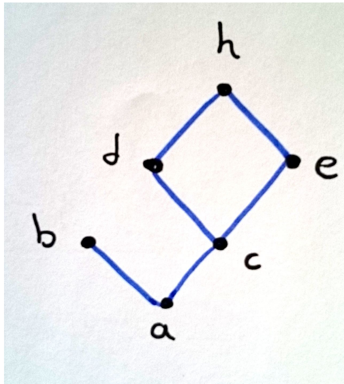
مثال ۸. روی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e\}$ ترتیب زیر را تعریف کنید:

$$a \leqslant b, a \leqslant c \quad , \quad a \leqslant d, a \leqslant e$$

$$c \leqslant d, c \leqslant e$$

به بیان دیگر رابطه‌ی ترتیبی زیر را در نظر بگیرید:

$$\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(c,d),(c,e),(a,h),(d,h),(a,h),(c,h)\}$$



رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت بالا در یک درخت نمایش داد.

تعریف ۹. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد. عنصر $a \in X$ را عنصر ماکزیمم (یا بیشینه) می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad x \leqslant a$$

دقت کنید که در تعریف ماکزیمم دو نکته نهفته است: اولاً هر عنصری با عنصر ماکزیمم قابل مقایسه است و ثانیاً هر عنصری از آن کمتر است. برای این که یک مجموعه، ماکزیمم داشته باشد نیازی نیست که همه‌ی اعضایش با هم قابل مقایسه باشند.

مثال ۱۰. در ساختار $(\{۴,۶,۱۲\},|)$، عدد ۱۲ ماکزیمم است زیرا

$$۴|۱۲$$

$$۶|۱۲$$

$$۱۲|۱۲$$

مثال ۱۱. مجموعه‌ی اعداد طبیعی با ترتیب عادی خود، دارای ماکزیمم (بیشینه) نیست.

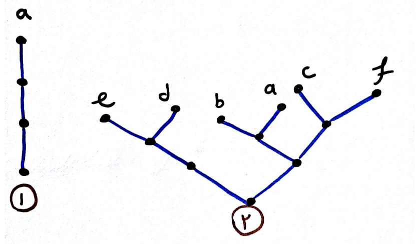
مثال ۱۲. در $(P(X),\subseteq)$ مجموعه‌ی X ماکزیمم است.

در مجموعه‌های مرتب جزئی مفهوم مهم دیگری به نام ماکزیمال بودن را نیز داریم:

تعریف ۱۳. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد. عنصر $a \in X$ را یک عنصر ماکزیمال (بیشینال) می‌خوانیم

$$\nexists x \in X \quad x \geqslant a$$

دقت کنید که: هیچ عنصری ازعنصر ماکزیمال بیشتر نیست. اما عنصر ماکزیمال لزوماً با همه‌ی عناصر قابل مقایسه نیست.



هر عنصری که با عنصر ماکزیمال قابل مقایسه باشد، از آن کمتر است.

سوال ۱۴. آیا در شکل ۲ عنصر a ماکزیمم است؟ خیر، زیرا a یا b قابل مقایسه نیست.

در شکل ۲ تمامی عناصر $\{a, b, c, d, e, f\}$ ماکزیمال هستند ولی هیچ یک ماکزیمم نیستند.

تمرین ۱۵. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. نقیض جمله‌های زیر را بنویسید.

$$\forall x \in X \quad x \leqslant a$$

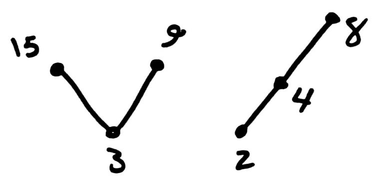
$$\nexists x \in X \quad x \geq a$$

پاسخ. نقیض جمله‌ی اول به صورت زیر است:

$$\exists x \in X \quad \Big(x \geqslant a \vee \underbrace{\big(\neg(x \leqslant a) \wedge \neg(x \geqslant a)\big)}_{\text{قابل مقایسه نیستند.}}\Big)$$

□

مثال ۱۶. در $\Big(\{۳, ۹, ۱۵, ۲, ۴, ۸\}, |\Big)$ عناصر ۹, ۱۵, ۸ ماکزیمال هستند ولی هیچ یک ماکزیمم نیستند.



تعریف ۱۷. فرض کنید $(X, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد و $A \subseteq X$. عنصر $a \in X$ را یک کران بالا برای A می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in A \quad x \leqslant a$$

توجه ۱۸. در تعریف بالا، ممکن است a در $X - A$ باشد. اگر $a \in A$ آنگاه a عنصر ماکزیمم است.

مثال ۱۹. مجموعه‌ی مرتب $(\mathbf{R}, \leqslant)$ را در نظر بگیرید. قرار دهید $A = (۰, ۱)$. مجموعه‌ی کران‌های بالای A برابر است با

$$\{x \in \mathbf{R}, ۱ \leqslant x\}$$

در مثال بالا هیچ کدام از کران‌های بالای A در A واقع نشده است.

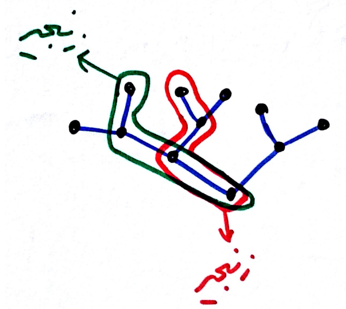
توجه ۲۰. اگر $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب باشد و $A\subseteq X$ و $a\in X$ یک کران بالا برای A باشد و $a\in A$ آنگاه a عنصر ماکزیمم A است.

توجه ۲۱. ساختار $(P(X),\subseteq)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های متناهی X باشد. تنها کران بالا برای این مجموعه، خود X است و این کران بالا در A نیست.

توجه ۲۲. در $(\mathbf{N},|)$ مجموعه‌ی اعداد اول دارای کران بالا نیست.

حال همه‌ی مواد لازم برای بیان لم زُرن را در اختیار داریم:
فرض کنید X یک مجموعه‌ی مرتب جزئی متناهی باشد؛ یعنی X یک درخت متناهی باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که X دارای عنصر یا عناصر ماکزیمال است. کافی است هر یک از شاخه‌های درخت را طی کنیم تا به یکنقطه‌ی انتهائي برسیم. عناصر انتهای هر شاخه، ماکزیمال هستند. حال اگر X یک مجموعه‌ی مرتب نامتناهی باشد، یعنی یک درخت نامتناهی باشد، وجود یا عدم وجود عناصر ماکزیمال در آن به راحتی قابل تشخیص نیست. لم زرن یک محک برای تشخیص وجود عناصر ماکزیمال به دست می‌دهد.

تعریف ۲۳. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. مجموعه‌ی $A\subseteq X$ را یک زنجیر در X می‌نامیم هرگاه $(A,\leqslant)$ مرتب خطی باشد.



توجه کنید که زنجیرها لزوماً شمارا نیستند یعنی همیشه نمی‌توان آنها را به صورت $\{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ نمایش داد. امکان دارد اندازه‌ی یک زنجیر ناشمارا باشد. مهم فقط این است که همه‌ی عناصر مجموعه‌ی مورد نظر با هم قابل مقایسه باشند.

۲.۱ لم زُرن

قضیه ۲۴ (لم زُرن). فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی ناتهیِ مرتب جزئی باشد. فرض کنید هر زنجیر $A\subseteq X$ دارای یک کران بالا در X باشد. آنگاه X دارای حداقل یک عنصر ماکزیمال است.

توجه ۲۵. در فرض لم زرن ادعا **نکرده‌ایم** که هر زنجیر دارای عنصر ماکزیمم است.

توجه ۲۶. لم زرن ابزار بسیار قدرتمندی در بسیاری اثباتهای ریاضیاتی، خصوصا در علم جبر است. در ابتدا این لم به عنوان جایگزینی برای اصل انتخاب ارائه شده بود اما بعدها ثابت شد که این لم با اصل انتخاب معادل است. یعنی با استفاده از اصل

انتخاب و سایر اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها لم زرن ثابت می‌شود و نیز با استفاده از لم زرن و بقیه‌ی اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌توان اصل انتخاب را ثابت کرد. در منطق این گفته را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ZF + Zorn \vdash C(= Choice)$$

$$ZFC \vdash Zorn$$

به دانشجویانی که علاقه‌مند به فهم دقیق علامتهای بالا هستند پیشنهاد می‌کنم درس منطق ریاضی را در ترم آینده بگیرند.

در جلسه‌ی آینده اصل انتخاب را با استفاده از لم زرن ثابت خواهیم کرد و چند نمونه کاربرد این لم را خواهیم دید. توجه کنید که «زُرن» را در برخی کتابها، به صورت تسرن می‌نویسند؛ بدین علت که z در زبان آلمانی، «تْزْ» خوانده می‌شود.