۱ جلسه‌ی بیست و سوم، دوشنبه

در جلسات قبل درباره‌ی مجموعه‌های نامتناهی بسیار سخن گفتیم. فهمیدیم که نامتناهی‌ها نیز اندازه‌های مختلف دارند و از هر نامتناهی، یک نامتناهی بزرگتر هم پیدا می‌شود. فهمیدیم که کوچکترین نامتناهی، هم‌اندازه‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی است. این که اندازه‌ی اولین نامتناهی بعد از اندازه‌ی اعداد طبیعی چیست، هنوز دانسته نیست و فرضیه‌ی پیوستار در همین باره است. فرضیه‌ی پیوستار بیانگر این است که اولین نامتناهی بزرگتر از اعداد طبیعی، هم‌اندازه‌ی اعداد حقیقی است.

در این جلسه می‌خواهیم کمی هم درباره‌ی متناهی صحبت کنیم.

۱.۱ مجموعه‌های متناهی

مجموعه‌ی A را متناهی می‌نامیم هرگاه عدد n موجود باشد به طوری که

$$A \cong \{۰, ۱, ۲, \ldots, n - ۱\}$$

توجه ۱. (درصورت پذیرش اصل انتخاب) مجموعه‌ی A متناهی است اگر و تنها اگر

$$|A| \lneqq \aleph_۰$$

توجه بالا بیانگر این است که اولین مجموعه‌ی نامتناهی، هم‌اندازه‌ی اعداد طبیعی است و هر مجموعه‌ای که از مجموعه‌ی اعداد طبیعی اکیداً کوچکتر باشد، متناهی است.

اثبات. قبلا ثابت کردیم که اگر A نامتناهی باشد آنگاه A دارای زیر مجموعه‌ای شماراست. یعنی $|A| \geqslant \aleph_۰$. □

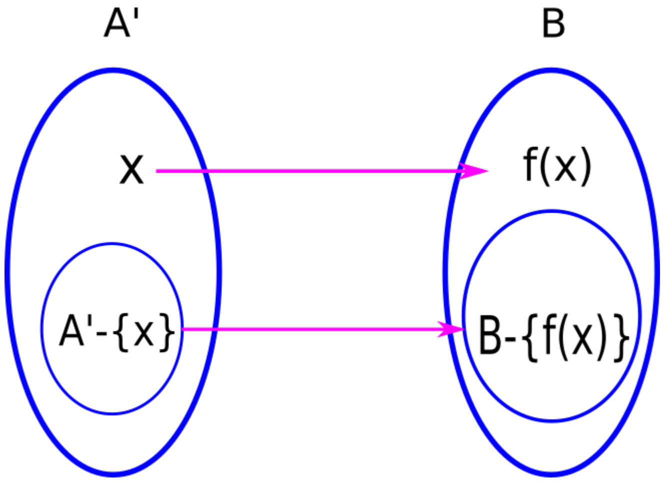
قضیه ۲. اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد و B یک مجموعه‌ی دلخواه و $f : A \to B$ تابعی پوشا باشد آنگاه B نیز متناهی است و $|B| \leqslant |A|$.

اثبات. حکم را با استقراء روی $|A|$ ثابت می‌کنیم. اگر $|A| = ۰$ آنگاه $A = \emptyset$ پس $B = \emptyset$. یعنی $|B| \leqslant |A| = ۰$. فرض کنیم حکم برای $|A| = n$ درست باشد. فرض کنید که $|A'| = n + ۱$ و تابع $f : A' \to B$ پوشا باشد. عنصر $x \in A'$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $f(A' - \{x\})$ تمام $B - \{f(x)\}$ را می‌پوشاند. بنا به فرض استقراء $|B - \{f(x)\}| \leqslant |A' - \{x\}|$ به بیان دیگر

$$|B| - ۱ \leq |A| - ۱$$

و در نتیجه داریم

$$|B| \leqslant |A'|$$



□

لم ۳. اگر A و B متناهی باشند و $|A| = |B|$ و $f : B \to A$ پوشا باشد، آنگاه f یک به یک است.

اثبات. فرض کنید f یک به یک نباشد و عناصر $x_۱, x_۲ \in B$ موجود باشند به طوری که

$$f(x_۱) = f(x_۲) = y \in A$$

می‌دانیم که تابع f از $B - \{x_۱, x_۲\}$ به $A - \{y\}$ پوشاست. پس بنا به لم قبل

$$|A - \{y\}| \leqslant |B - \{x_۱, x_۲\}|$$

یعنی

$$|A| - ۱ \leqslant |B| - ۲$$

بنابراین

$$|A| \leqslant |B| - ۱$$

و این نتیجه با فرض $|A| = |B|$ متناقض است. □

لم ۴. فرض کنید A یک مجموعه‌ی دلخواه و B یک مجموعه‌ی متناهی باشند. فرض کنید $f : A \to B$ یک تابع یک به یک باشد. آنگاه A نیز متناهی است و $|A| \leqslant |B|$.

اثبات. می‌دانیم که $|f(A)| = |A|$ زیرا تابع f یک به یک است. و نیز می‌دانیم که $f(A) \subseteq B$ پس

$$|B| \geqslant |f(A)| = |A|$$

$\square$

نتیجه ۵. اگر A و B متناهی باشند و $|B| = |A|$ و تابع $f : A \to B$ یک به یک باشد آنگاه تابع f پوشاست.

همه‌ی این لمها را گفتیم تا به نتیجه‌ی جالب زیر برسیم: بین دو مجموعه‌ی متناهی هم‌اندازه، پوشا بودن یک تابع و یک‌به‌یک بودن آن با هم معادلند:

نتیجه ۶. اگر $|B| = |A|$ و A و B متناهی باشند موارد زیر با هم معادلند:

۱. تابع $f : A \to B$ پوشاست.

۲. تابع $f : A \to B$ یک به یک است.

۳. تابع $f : A \to B$ دو سوئی است.

نتیجه ۷. اگر B متناهی باشد و $A \subseteq B$ آنگاه A هم متناهی است. (زیرا تابع همانی از A به B تابعی یک به یک است).

نتیجه ۸. اگر A نامتناهی باشد و $A \subseteq B$ آنگاه B نامتناهی است. (عکسِ نقیض جمله‌ی بالا).

نتیجه ۹. (اصل لانه‌ی کبوتری) اگر A و B متناهی باشند و $|B| \leqslant |A|$ و $f : A \to B$ یک تابع باشد آنگاه

$$\exists x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2).$$

.

با استقراء می‌توان اصول شمارشی زیادی برای مجموعه‌های متناهی ثابت کرد. چند تا از آنها را در زیر آورده‌ایم.

توجه ۱۰. اگر A و B متناهی باشند

۱. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

۲. $|A \times B| = |A| \times |B|$ (این را با اصول شمارشی آمار و احتمال نیز به آسانی می‌توان ثابت کرد: برای هر عضو در A به اندازه‌ی $|B|$ انتخاب داریم)

۳. $|A^B| = |A|^{|B|}$ (این را نیز با اصول احتمال می‌توان ثابت کرد. به اندازه‌ی $|A|$ جعبه داریم که می‌خواهیم آنها را با عناصر B پر کنیم.) یادآوری می‌کنم که با A^B مجموعه‌ی همه‌ی توابع از B به A را نشان می‌دهیم.

۴. $|P(A)| = 2^{|A|}$ (برای هر عنصر در A دو حالت داریم، یا در زیرمجموعه‌ی مورد نظر موجود است و یا نیست، بنابراین $2^{|A|}$ زیرمجموعه به دست می‌آوریم).

بحث درباره‌ی اندازه‌ی مجموعه‌ها را فعلاً با چند تمرین زیر رها می‌کنیم؛ هر چند در جلسات آینده می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A, B همواره یا $A \leqslant B$ و یا $B \leqslant A$. یعنی برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B با یک تابع یک به یک از A به B موجود است یا یک تابع یک به یک از B به A موجود است. یعنی اندازه‌ی دو مجموعه‌ی داده شده همواره با هم قابل مقایسه است. برای اثبات این گفته نیازمند معرفی مفاهیم جدیدی هستیم.

تمرین ۱۱. نشان دهید که

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

تمرین ۱۲. نشان دهید که تعداد بازه‌های دو به دو مجزا در اعداد حقیقی، شماراست.

تمرین ۱۳. نشان دهید که تعداد دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی شماراست.

تمرین ۱۴. عدد $x \in \mathbb{R}$ را یک عدد جبری می‌گوئیم هرگاه یک چندجمله‌ای f با ضرایب در اعداد گویا موجود باشد، به طوری که $f(x) = 0$. نشان دهید که تعداد اعداد جبری شماراست.

تمرین ۱۵. فرض کنید که اندازه‌ی مجموعه‌های A, B برابر با $2^{\aleph_0}$ باشد و اینـدو با هم اشتراکی نداشته باشند. نشان دهید که اندازه‌ی $A \cup B$ برابر با $2^{\aleph_0}$ است.

تمرین ۱۶. برای مجموعه‌های دلخواهِ X, Y, Z که در آن $Y \cap Z = \emptyset$ نشان دهید که

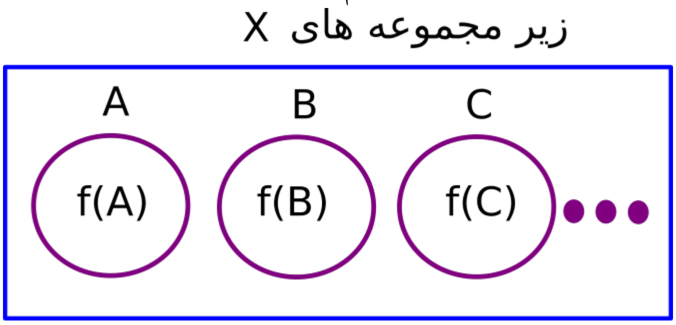
$$X^Y \times X^Z \cong X^{Y \cup Z}$$

$$(X^Y)^Z \cong X^{Y \times Z}$$

۲.۱ اصل انتخاب و لمِ زُرن

۱.۲.۱ اصل انتخاب

اصل انتخاب را در جلسات قبل دیده‌ایم. خوب است با چند بیان مختلف از این اصل آشنا شویم: اگر به تعداد نامتناهی مجموعه داشته باشیم، تابعی به نام یک تابع انتخاب موجود است که از هر یک از این مجموعه‌ها عنصری انتخاب می‌کند. به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه یک تابع $f : I \to \bigcup_{i \in I}$ موجود است به طوری که برای هر $i \in I$ داریم $f(i) \in A_i$. به بیان معادل اگر X یک مجموعه‌ی ناتهیِ دلخواه باشد و $P(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های آن باشد. آنگاه تابعی مانند f از $P(X) - \{\emptyset\}$ به X موجود است به طوری که برای هر $A \in P(X)$ داریم $f(A) \in A$.



$$P(X) \xrightarrow{f} X$$

$$f(A) \in A$$

$$f(B) \in B$$

$$f(C) \in C \ldots$$

باز به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد آنگاه $\Pi_{i\in I}A_i \neq \emptyset$.
توجه کنید که طبق تعریف حاصلضرب نامتناهی مجموعه، داریم:

$$(x_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}A_i \iff \forall i \quad x_i \in A_i$$

(من نیز در سال اول کارشناسی اصل انتخاب را درک نمی‌کردم. در واقع برای آن «اثبات» زیر را داشتم و از این رو با خود می‌گفتم که چیزی که به این آسانی اثبات می‌شود، دیگر نباید اصلش خواند! استدلال ساده‌لوحانه‌ی آن زمانم را در زیر نوشته‌ام. شما ایرادش را بگویید:
اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد، آنگاه

$$\forall i \in I \quad A_i \neq \emptyset$$

بنابراین

$$\forall i \in I \exists x_i \quad x_i \in A_i$$

پس بنا به تعریف

$$(x_i)_{i\in I} \in \prod A_i$$

!) همان طور که در استدلال اشتباه بالا می‌بینید، اصل انتخاب آنقدر برای ما بدیهی به نظر می‌رسد که گاهی نمی‌توانیم تشخیص دهیم که آیا از آن در اثباتیا استفاده کرده‌ایم یا نه. در ریاضیات سطوح بالاتر، بررسی این که کدام اثباتها بر اصل انتخاب استوارند مهم است. گاهی می‌کوشیم که در صورت ممکن برای برخی از آنها اثباتی بیاوریم که در آن از اصل انتخاب استفاده نشده باشد.
لم زرن، در ابتدا به عنوان اصلی جایگزین اصل انتخاب (یا اصل خوش‌ترتیبی) ارائه شده بود، اما بعدها ثابت شد که این اصل در واقع معادل اصل انتخاب است. یعنی اصل انتخاب از لم زرن و باقی اصول نتیجه می‌شود و لم زرن از اصل انتخاب و باقی اصول نتیجه می‌شود. با این حال، فرمول‌بندی لم زرن به گونه‌ای است که کاربرد آن در بسیاری شاخه‌های ریاضی، بالاخص جبر، بسیار مشهودتر از اصل انتخاب است. برای ورود به بحث لم زرن، نیازمند مقدمات بخش بعدی هستیم.

۱.۲.۲ مجموعه‌های مرتب

رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X را یک **رابطه‌ی ترتیبی** می‌خوانیم هرگاه R انعکاسی، تقارنی و متعدی باشد. معمولاً در این صورت به جای xRy می‌نویسیم $x \leqslant y$. اگر R یک رابطه‌ی ترتیبی روی X باشد، (X, R) را یک مجموعه‌ی مرتب می‌خوانیم.

مثال ۱۷. ساختارِ $(\mathbf{N}, \leqslant)$، یعنی مجموعه‌ی اعداد طبیعی با ترتیب معمولش(همان ترتیبی که شما از ریاضی مقدماتی به خاطر دارید) یک مجموعه‌ی مرتب است، زیرا

$$\forall x \quad x \leqslant x$$

$$\forall x, y \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant x \to x = y$$

$$\forall x, y, z \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z$$

توجه ۱۸. ترتیب روی اعداد طبیعی تام (یا خطی) است. یعنی

$$\forall x, y \in \mathbf{N} \quad x \leqslant y \vee y \leqslant x$$

تعریف ۱۹. مجموعه‌ی مرتب $(X, \leqslant)$ را مرتب خطی (مرتب تام) می‌نامیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$$

در غیر این صورت $(X, \leqslant)$ را مرتب جزئی می‌نامیم.

دقت کنید که هم در مجموعه‌ی مرتب جزئی و هم در مجموعه‌ی مرتب خطی عبارت زیر درست است:

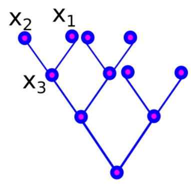
$$\forall x, y \quad (x \leq y \wedge y \leq x \to x = y)$$

ولی تفاوت این است که در مجموعه‌ی مرتب خطی جمله‌ی زیر درست است ولی در مجموعه‌ی مرتب جزئی جمله‌ی زیر لزوماً درست نیست:

$$\forall x, y \quad (x \leq y \vee y \leq x)$$

یعنی در یک مجموعه‌ی مرتب جزئی ممکن است دو عنصرِ x, y پیدا شوند که با هم قابل مقایسه نباشند (یعنی هیچیک از دیگری بیشتر یا کمتر نباشد). مجموعه‌ی مرتب خطی را می‌توان به صورت یک زنجیر تجسم کرد که ممکن است نامتناهی باشد:

مجموعه‌ی مرتب جزئی را می‌توان به صورت درختی تجسم کرد:



در شکل بالا $x_۳$ با هر یک از عناصر $x_۱$ و $x_۲$ قابل مقایسه است و از آنها کمتر است، ولی عناصر $x_۲$ و $x_۱$ قابل مقایسه با هم نیستند. همچنین $x_۲$ با آخرین نقطه سمت راست درخت قابل مقایسه نیست. عنصر پایین درخت با همه‌ی عناصر قابل مقایسه و از همه‌ی آنها کمتر است. دقت کنید که درخت بالا می‌تواند از بالا و پائین نامتناهی باشد و نیز ممکن است در جاهائی از آن شکل لوزی نیز داشته باشیم.

درباره‌ی مجموعه‌های مرتب جزئی در جلسه‌ی آینده بیشتر صحبت خواهیم کرد.