۱ جلسه‌ی بیست‌ویکم، تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی

در جلسه‌ی قبل مثالهائی زیادی از مجموعه‌های شمارا دیدیم. گفتیم که X شماراست هرگاه

$$X \cong \{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$$

و گفتیم که در این صورت می‌نویسیم:

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_0.$$

با یک برهان قطری، ثابت کردیم که

$$\mathbf{card}[0,1] \neq \aleph_0.$$

آنچه را که در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم، می‌توانیم به صورت زیر به زبان کاردینالها بنویسیم:
اجتماع یک مجموعه‌ی شمارا با یک مجموعه‌ی n عضوی، شماراست:

$$\aleph_0 + n = \aleph_0.$$

اجتماع دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

اجتماع شمارا تا مجموعه‌ی شمارا، شماراست؛ به بیان دیگر، حاصلضرب دو مجموعه‌ی شمارا، شماراست:

$$\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \dots}_{\aleph_0\text{بار}} = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0.$$

به بیان دیگر:

$$\aleph_0 \times \aleph_0 = \mathbf{card}(\mathbf{N}\times\mathbf{N}) = \mathbf{card}(\mathbf{N}) = \aleph_0.$$

توجه ۱. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. گفتیم که $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$ یعنی تابعی یک به یک و پوشا از X به Y موجود است.

در ادامه‌ی درس می‌خواهیم روی اندازه‌ی مجموعه‌ها، ترتیب تعریف کنیم و مشخص کنیم که در چه صورت می‌گوئیم که اندازه‌ی یک مجموعه، از دیگری بیشتر است.

تعریف ۲. می‌نویسیم $\mathbf{card}(X) \leqslant \mathbf{card}(Y)$ یا $X \leq Y$ هرگاه تابعی یک به یک (و نه لزوماً پوشا) از X به Y موجود باشد.

مثال ۳. برای هر عدد طبیعی n داریم $n < \aleph_0$؛ زیرا تابعی یک به یک از $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ به $\mathbf{N}$ موجود است.

$$\underbrace{\{0, 1, \ldots, n-1\}}_{=n} \xrightarrow{f} \mathbf{N}$$

می‌دانیم که اگر n و m دو عدد طبیعی باشند، آنگاه اگر

$$(m \leqslant n) \wedge (n \leqslant m)$$

آنگاه

$$m = n$$

سوال ۴. آیا مشابه عبارت بالا برای ترتیب کاردینالها هم برقرار است؟ یعنی اگر

$$\mathbf{card}(X) \leqslant \mathbf{card}(Y)$$

و

$$\mathbf{card}(Y) \leqslant \mathbf{card}(X)$$

آیا لزوماً $\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$؟

آنچه در سؤال بالا پرسیده شده است، بیان دیگری از قضیه‌ی زیر است:

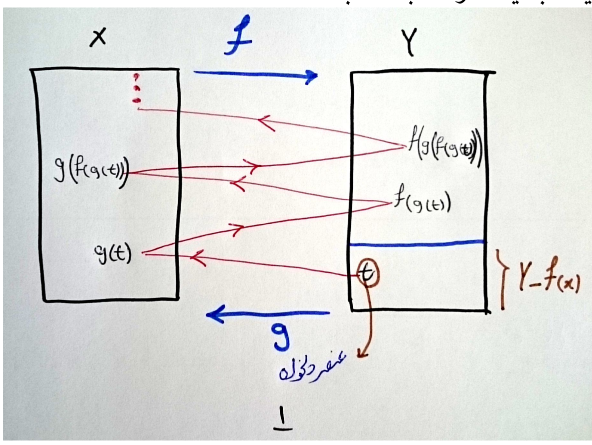
قضیه ۵ (کانتور_ برنشتاین). فرض کنید یک تابع یک به یک از X به Y موجود باشد و یک تابع یک به یک از Y به X موجود باشد. آنگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود است.

برای قضیه‌ی کانتور برنشتاین اثباتهای مختلفی وجود دارد که می‌توانید آنها را صفحه‌ی ویکی‌پدیای فارسی بیابید. در اینجا سعی کرده‌ام اثباتی را بیاورم که قابل فهمتر باشد. [1] این قضیه، یکی از مهمترین قضایائی است که در این درس ثابت کرده‌ایم و از این رو برای کسی که اثبات این قضیه را نیز دقیق یاد بگیرد یک نمره قائل خواهم بود.

[1] البته آن صفحه را نیز من نوشته‌ام!

اثبات. اگر X و Y متناهی و به ترتیب دارای اندازه‌های m و n باشند، باشند، آنگاه وجود تابع یک به یک از X به Y معادلِ $m \leq n$ و وجود تابع یک به یک از Y به X معادل $n \leq m$ است. از این دو نتیجه می‌شود که $m = n$. این که یکی متناهی باشد و دیگری نامتناهی ممکن نیست، زیرا از یک مجموعه‌ی نامتناهی نمی‌توان تابعی یک‌به‌یک به یک مجموعه‌ی متناهی تعریف کرد.

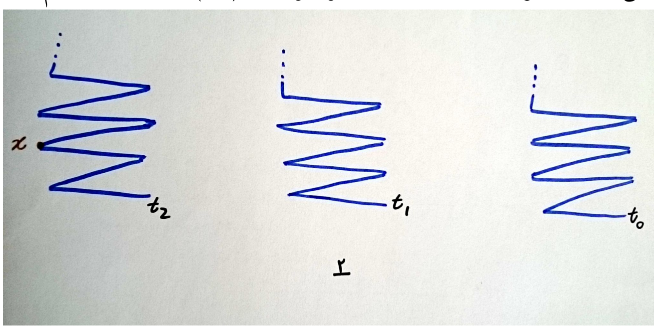
پس فرض کنیم ایندو نامتناهی باشند. فرض کنید f تابعی یک به یک از X به Y باشد و g تابعی یک به یک از Y به X باشد.



فرض کنید t یک عنصر دلخواهی در $Y - f(X)$ باشد. مطابق شکل بالا، دنباله‌ی زیر را بسازید:

$$t \to g(t) \to f\big(g(t)\big) \to g\Big(f\big(g(t)\big)\Big) \to f\Bigg(g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)\Bigg) \to \dots$$

این کار را برای همه‌ی tهای موجود در $Y - f(X)$ انجام دهید.



ادعای اول. هر کدام از دنباله‌های نوشته شده در بالا نامتناهی است؛ یعنی از سمت چپ و راست هیچگاه در طولی متناهی متوقف نمی‌شوند.

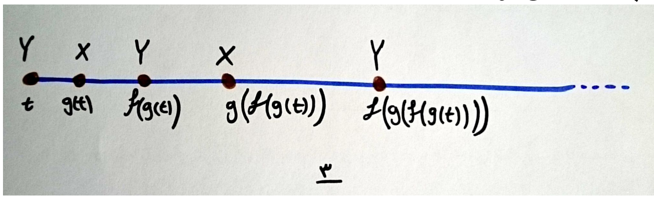
ادعای دوم. دنباله‌های بالا هیچ اشتراکی با هم ندارند. یعنی جملات سمت چپ یکی با دیگری جملات سمت راست یکی با دیگری اشتراکی ندارد.

فرض کنید ادعاهای اول و دوم هر دو ثابت شده باشند. تابع $h : X \to Y$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{اگر } x \text{ در سمت چپ یکی از دنباله‌های یادشده باشد.} \\ f(x) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

ادعای سوم. تابع h یک به یک و پوشاست.

اثبات ادعای اول.



برای سادگی نشان می‌دهیم که جمله‌ی اول و سوم هیچگاه با هم برابر نیستند. فرض کنید

$$f\big(g(t)\big) = f\left(g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)\right)$$

آنگاه از آنجا که f یک به یک است داریم:

$$g(t) = g\Big(f\big(g(t)\big)\Big)$$

حال از آنجا که g یک به یک است داریم

$$\underbrace{t}_{\in Y - f(X)} = \underbrace{f\big(g(t)\big)}_{\in f(X)} \quad ↯$$

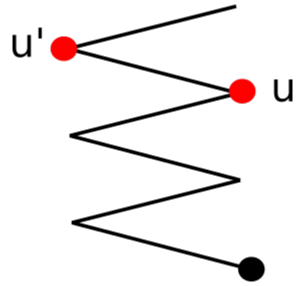
عبارت بالا، تناقض آمیز است. با همین ایده می‌توانید نشان دهید که هیچ دو جمله‌ی واقع در یک طرف یکسان از دنباله‌ی بالا با هم برابر نیستند. ادعای دوم نیز به طور کاملاً مشابه ثابت می‌شود.

اثبات ادعای سوم. می‌خواهیم ثابت کنیم تابع h یک به یک و پوشاست.

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & \text{اگر } x \text{ در سمت چپ یکی از دنباله‌های یادشده باشد.} \\ f(x) & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

اثبات پوشابودن. عنصر دلخواه $u \in Y$ را در نظر بگیرید. اگر یک زیگزاک، مشابه شکل زیر، از u بگذرد آنگاه داریم:

$$u = h(u')$$



اگر هیچ زیگزاگی از u نگذرد معلوم می‌شود که $u \in Y - f(X)$. زیرا در غیر این صورت u شروع یک زیگزاگ خواهد بود. پس $u \in f(X)$ یعنی $\exists u' \in X \quad f(u') = u$. اثبات یک به یک بودن تابعِ h به عهده‌ی شما. $\square$

در جلسات بعد کاربردهائی از قضیه‌ی بالا را خواهیم دید. در ادامه‌ی درس هدفمان این است که بدانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی دلخواه چقدر است.

در جلسات اول درس دیدیم که اگر X یک مجموعه‌ی متناهی و دارای n عضو باشد، آنگاه

$$|P(X)| = ۲^n$$

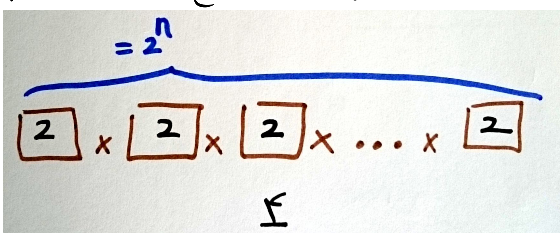
اثبات. قبلا ثابت کردیم که

$$|P(X)| = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \ldots + \binom{n}{n} = (۱ + ۱)^n = ۲^n$$

توجه کنید که بسط دوجمله‌ایِ $\binom{n}{m}$ در واقع نشان دهنده‌ی تعداد زیرمجموعه‌های m عضویِ مجموعه‌ی n عضوی مورد نظر ماست.

برای گفته‌ی بالا می‌توان اثباتی آماری نیز ارائه کرد.

فرض کنید بخواهیم تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی n عضویِ X را بشماریم. هر عنصر دلخواه در X در یک مجموعه‌ی A یا واقع است یا نیست. پس برای هر عضو دو حالت موجود است.



به بیان دیگر، برای این که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی را بشماریم، کافی است تعداد دنباله‌های به طول n را بشماریم که از ۱ ,۰ ساخته شده‌اند. یعنی هر عضوی را که بخواهیم در زیرمجموعه‌ی مورد نظرمان باشد، با شماره‌ی ۱ و هر عضوی را که نخواهیم با شماره‌ی ۰ مشخص کنیم. $\square$

در ادامه‌ی درس می‌خواهیم ایده‌ی اثبات بالا را تعمیم دهیم.

تعریف ۶. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. تعریف می‌کنیم:

$$X^Y = \text{مجموعه‌ی همه‌ی توابعِ از } Y \text{ به } X$$

بنابراین برای مثال $۲^{\mathbf{N}}$ یا همان $\{۰,۱\}^{\mathbf{N}}$ برابر است با مجموعه‌ی همه‌ی توابع از $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی $\{۰,۱\}$.

قضیه ۷.

$$|P(\mathbf{N})| = |۲^{\mathbf{N}}|$$

به بیان دیگر

$$\mathbf{card}\big(P(\mathbf{N})\big) = ۲^{\aleph_۰}$$

اثبات. باید یک تابع یک و پوشای h را از $P(\mathbf{N})$ به $\{۰,۱\}^{\mathbf{N}}$ تعریف کنیم. تابع h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنید $A \in P(\mathbf{N})$ یعنی $A \subseteq \mathbf{N}$. باید $h(A)$ خود تابعی از $\mathbf{N}$ به $\{۰,۱\}$ باشد. تابع $h(A)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$h(A)(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

بررسی کنید که تابع h یک به یک و پوشاست. دوباره یادآوری می‌کنم که h مجموعه‌ی A را به تابعِ $h(A)$ می‌برد و تابع $h(A)$ به صورت بالاست. $\square$

در واقع تابع بالا نیز برای تعیین زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ به این صورت عمل کرده است که اگر بخواهیم عضوی در مجموعه‌ی مورد نظر باشد، آن را با ۱ و در غیر این صورت با ۰ مشخص

کرده‌ایم. برای مثال در شکل زیر، یکی از زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ را مشخص کرده‌ایم:

$$\begin{array}{ccccccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \dots \end{array}$$

تا اینجا ثابت کردیم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، برابر است با تعداد توابعِ از مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ به مجموعه‌ی $\{۰, ۱\}$. گفتیم که این را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۲^{\aleph_۰} = \big(P(\mathbf{N})\big)$$

در مثال بعدی نشان داده‌ایم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی، در واقع برابر با تعداد اعداد حقیقی است:

مثال ۸.

$$|\mathbf{R}| = ۲^{\aleph_۰} = \mathbf{card}(۰, ۱) = \mathbf{card}(\mathbf{R})$$

اثبات. هر عدد حقیقی در بازه‌ی $(۰, ۱)$ دارای یک بسط اعشاری شمارا در مبنای ۲ است. برای مثال عبارت زیر یکی از این اعداد است:

$$۰/۰۱۰۱۱۰\dots$$

تعداد اینگونه بسطها برابر است با تعداد دنباله‌های ۰ و ۱ به طول اعداد طبیعی و تعداد این دنباله‌ها برابر است با تعداد توابع از $\mathbf{N}$ به $\{۰, ۱\}$. (این اثبات را دقیق کنید). □

نتیجه ۹. در جلسات قبل نشان دادیم که تعداد اعداد حقیقی برابر است با اندازه‌ی بازه‌ی $(۰, ۱)$ و این بازه ناشماراست. پس از آنجا که $|(۰, ۱)| = ۲^{\aleph_۰}$ پس $\aleph_۰ \neq ۲^{\aleph_۰}$.

پس تا اینجا به این نکته‌ی مهم رسیدیم که تعداد زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی ناشماراست و از این رو با $\aleph_۰$ برابر نیست.

لم ۱۰. $\aleph_۰ \lneqq ۲^{\aleph_۰}$

اثبات. در بالا گفتیم که تساوی برقرار نیست. برای این که نامساوی برقرار باشد، کافی است یک تابع یک به یک از $\mathbf{N}$ به $P(\mathbf{N})$ پیدا کنیم. تابع زیر، جواب می‌دهد:

$$x \to \{x\}$$

□