۱ جلسه‌ی بیستم، شنبه

۱.۱ بررسی بیشتر مجموعه‌های شمارا

در جلسات قبل، دسته‌بندی زیر را برای مجموعه‌ها، بر حسب سایز، معرفی کردیم:

$$\text{مجموعه‌ها}\begin{cases}\text{متناهی}\\[2ex] \text{نامتناهی}\begin{cases}\text{شمارا} & \cong \mathbb{N}\\[1ex] \text{ناشمارا} & \ncong \mathbb{N}\end{cases}\end{cases}$$

گفتیم که مجموعه‌ی X را شمارا می‌گویند هرگاه بتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

مثال ۱. در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که $\mathbf{N} \ncong \mathbf{R}$؛ زیرا $(۰,۱) \cong (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \cong \mathbf{R}$. و با برهان قطری کانتور ثابت کردیم که $(۰,۱)$ ناشماراست.

در ادامه‌ی جلسه، مثالهای بیشتری از مجموعه‌های شمارا خواهیم دید. **توجه کنید که در این جزوه، منظورمان از شمارا، شمارای نامتناهی است.**

مثال ۲. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی شمارا باشند و $A \cap B = \emptyset$. آنگاه $A \cup B$ نیز شماراست.

اثبات. فرض کنید $\{x_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ شمارشی برای A باشد و $\{y_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ شمارشی برای B باشد. داریم:

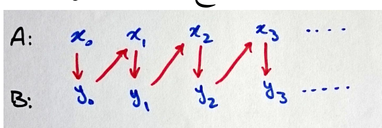
$$A \cup B = \{x_۰, y_۰, x_۱, y_۱, x_۲, y_۲, x_۳, y_۳, \ldots\}$$

تابع $f : \mathbf{N} \to A \cup B$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(۲i) = x_i$$

$$f(۲i + ۱) = y_i$$

دقت کنید که تابع بالا، مجموعه‌ی $A \cup B$ را به صورت زیر می‌شمارد:



بررسی کنید که تابع f یک به یک و پوشاست. $\square$

توجه ۳. در مثال بالا مجموعه‌ی A را با اعداد زوج و مجموعه‌ی B را با اعداد فرد متناظر کردیم. از این رو $A \cup B$ با مجموعه‌ی اعداد طبیعی متناظر شد و از اینجا فهمیدیم که شماراست.

مثال ۴. مجموعه‌ی اعداد صحیح، $\mathbf{Z}$، شماراست.

اثبات. داریم

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \underbrace{\mathbf{Z}^-}_{\text{اعداد صحیح منفی}}$$

و می‌دانیم که

$$\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}^- = \emptyset$$

بنا به مثال قبل، کافی است نشان دهیم که $\mathbf{Z}^-$ شماراست.

$$\mathbf{Z}^- = \{\overset{۰}{-۱}, \overset{۱}{-۲}, \overset{۲}{-۳}, \overset{۳}{-۴}, \ldots\}$$

تابع $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}^-$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$x \overset{f}{\mapsto} -x - ۱$$

تابع بالا یک به یک و پوشاست. پس $\mathbf{Z}^-$ شماراست. پس $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^- \cup \mathbf{N}$ شماراست. $\square$

در مثال بعد می‌بینیم که اگر یک عنصر به مجموعه‌ای شمارا اضافه کنیم، مجموعه‌ی حاصل همچنان شماراست. چند مثال بعدی در واقع بیان ریاضی همان پارادوکس هتل هیلبرت است که در جلسات گذشته درباره‌اش صحبت کردیم.

مثال ۵. فرض کنید A یک مجموعه‌ی شمارا باشد و $x \notin A$. آنگاه $A \cup \{x\}$ هم شماراست.

اثبات. از آنجا که A شماراست داریم

$$A \cong \mathbf{N}$$

یعنی

$$A = \{x_۰, x_۱, x_۲, \ldots\}$$

می‌نویسیم:

$$A \cup \{x\} = \{x, x_۰, x_۱, x_۲, \ldots\}$$

تابع $f:\mathbf{N}\to A\cup\{x\}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(0)=x$$

$$f(i)=x_{i+1}$$

بررسی کنید که تابع بالا یک به یک و پوشاست. $\square$

مثال ۶. اگر A شمارا باشد و $x\in A$ آنگاه $A-\{x\}$ هم شماراست.

اثبات. فرض کنید

$$A=\{x_0,x_1,x_2,\dots\}$$

و فرض کنید عنصر برداشته شده $x=x_n$ باشد.

$$A-\{x\}=\{x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_{n+1},\dots\}$$

تابع $f:\mathbf{N}\to A-\{x_n\}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} 0&\to x_0\\ &\vdots\\ x_{n-1}&\to x_{n-1}\\ i\to x_{i+1}\quad i&\geq n\end{aligned}$$

تابع بالا یک به یک و پوشاست. $\square$

مثال ۷. فرض کنید A شماراست و $x_0,\dots,x_n\notin A$ نشان دهید که $A\cup\{x_0,\dots,x_n\}$ شماراست.

اثبات. به عهده‌ی شما (از استقراء کمک بگیرید). $\square$

مثال ۸. اگر A شمارا باشد و $x_1,\dots,x_n\in A$ آنگاه $A-\{x_1,\dots,x_n\}$ هم شماراست.

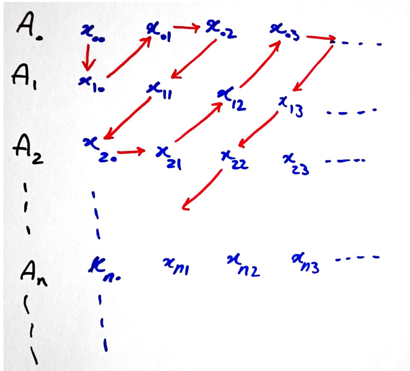
اثبات مثال بالا نیز با استفاده از استقراء آسان است.

مثال ۹. اگر $A_1, \ldots, A_n$ مجموعه‌هایی شمارا باشند به طوری که $A_i \cap A_j = \emptyset$ (برای هر $1 \leqslant i, j \leqslant n$) آنگاه $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ شماراست.

مثال بالا را نیز با استقراء ثابت کنید. در مثال زیر گفته‌ایم که اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارا، مجموعه‌ای شماراست.

مثال ۱۰. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ خانواده‌ای شمارا از مجموعه‌ی شماراست و برای هر $i \neq j \in \mathbb{N}$ داریم $A_i \cap A_j = \emptyset$. آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i$ شماراست.

اثبات. مجموعه‌های A_i را به صورت زیر بشمارید:



با استفاده از مسیری که در شکل بالا مشخص شده است، $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ را بشمارید. (برای کسی که ضابطه‌ی نگاشت مورد نظر از $\mathbb{N}$ به $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ را پیدا کند نمره‌ای در نظر گرفته‌ام!) □

سوال ۱۱. آیا حکم مثال قبل را می‌شد با استقراء ثابت کرد؟

پاسخ سؤال بالا منفی است. دقت کنید که با استقراء می‌توان درباره‌ی اعداد طبیعی حکم ثابت کرد **نه درباره‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی.** اگر $p(0)$ درست باشد و از درستی $p(n)$ بتوان درستی $p(n+1)$ را نتیجه گرفت، آنگاه نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد طبیعیِ n حکم $p(n)$ درست است. مثلاً با استقرا می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعیِ n اجتماعِ n مجموعه‌ی شمارا، شماراست. اما اثبات این که اجتماع تعدادی شمارا مجموعه‌ی شمارا شماراست، با استقراء روی اعداد طبیعی ممکن نیست.

گفته‌ی بالا از لحاظ فلسفی نیز دارای بار معنائی است. وقتی در درون یک جهان از استقراء استفاده می‌کنیم، حکمی درباره‌ی اعضای آن جهان نتیجه می‌گیریم نه حکمی درباره‌ی کُلِّ آن جهان یا بیرون آن! مثال صف را در نظر بگیرید. فرض کنید صفی شمارا از افراد پیش روی شماست. نفر

اول چشمان آبی دارد و از این که نفر n ام چشمان آبی دارد می‌توان نتیجه گرفت که نفر $n+۱$ ام نیز چشمان آبی دارد. ازاین تنها نتیجه می‌شود که هر کس که در این صف قرار دارد دارای چشمان آبی است؛ اما نمی‌توان نتیجه گرفت که خودِ صف هم دارای چشم است و چشمان آن آبی است!
بگذریم! پس ثابت کردیم که اگر $\{A_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های شمارا باشد آنگاه $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} A_i$ شماراست.

مثال ۱۲. مجموعه‌ی $\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\{(x,y)|x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$ شماراست.

اثبات. داریم

$$\{۰\}\times\mathbf{N}=\{(۰,۰)(۰,۱)(۰,۲)\dots\}$$

$$\{۱\}\times\mathbf{N}=\{(۱,۰)(۱,۱)(۱,۲)\dots\}$$

$$\vdots$$

می‌دانیم که

$$\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\{n\}\times\mathbf{N}$$

شماراست. گفتیم که اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شمارائی که دو به دو متمایزند، شماراست.
□

مثال ۱۳. اگر X و Y شمارا باشند آنگاه $X\times Y$ هم شماراست. (همان اثبات بالا).

مثال ۱۴. هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbf{N}$ شماراست.

اثبات. فرض کنید $A\subseteq\mathbf{N}$ نامتناهی باشد. هر زیر مجموعه از $\mathbf{N}$ دارای یک کوچکترین عضو است. فرض کنید $x_۰$ کوچکترین عضو A باشد. حال فرض کنید $x_۰,\dots,x_n$ پیدا شده باشند؛ $x_{n+۱}$ را کوچکترین عضو $A-\{x_۰,\dots,x_n\}$ بگیرید. تابع زیر را از $\mathbf{N}$ به A در نظر بگیرید.

$$f(i)=x_i$$

اثبات پوشا بودن f: فرض کنید t عنصر دلخواهی از A باشد. پس $t=n$ یک عدد طبیعی است. تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از n برابر با n است. پس حداکثر پس از طی n مرحله در بالا به t می‌رسیم؛ به بیان دیگر از میان $f(۰),\dots,f(n-۱)$ حتما یکی برابر با t خواهد بود. □

مثال ۱۵. مجموعه‌ی $\mathbf{Q}^{\geqslant 0}$ شماراست. (منظورمان از $\mathbf{Q}^{\geqslant 0}$ اعداد گویای بزرگتر یا مساوی صفر است.)

اثبات.

$$\mathbf{Q}^{\geqslant 0} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbf{N}, (a,b) = 1\}$$

$$\begin{array}{cccccccl}
\cdots & & & & & 0 & & \\
\cdots & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & & \\
\cdots & \frac{2}{5} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{1} & \leftarrow & \text{مخرج اعداد فرد هستند پس شماراست.} \\
\cdots & \frac{3}{5} & \frac{3}{4} & & \frac{3}{2} & \frac{3}{1} & \leftarrow & \text{شمارا} \\
\cdots & \frac{4}{5} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{1} & \leftarrow & \text{شمارا}
\end{array}$$

همان طور که در بالا به طور نادقیق گفته‌ایم، $\mathbf{Q}^{\geqslant 0}$ اجتماعی شمارا از مجموعه‌های شماراست. پس $\mathbf{Q}^{\geqslant 0}$ شماراست. آیا می‌توانید اثبات بالا را دقیق کنید؟ $\square$

در جلسات آینده اثبات دیگری نیز برای مثال بالا ارائه خواهیم کرد.

مثال ۱۶. مجموعه‌ی $\mathbf{Q}^c$ (اعداد گنگ) ناشماراست.

اثبات. اگر $\mathbf{Q}^c$ شمارا باشد آنگاه $\mathbb{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^c$ شماراست که این تناقض است. $\lightning$ $\square$