۱ جلسه‌ی دوم

در این جلسه به ادامه‌ی معناشناسیِ منطق گزاره‌ها می‌پردازیم. لازم می‌دانم که دوباره درباره‌ی $p \vee q$ توضیحی بدهم.

توجه ۱. علامت $\vee$ «یای» مانع جمع نیست. در واقع اگر بخواهیم مانع جمع شویم، گزاره‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

سوال ۲ (سوال دانشجویان)**.** معنی کلمه‌ی **جمع** در **یای مانع جمع** چیست؟

جمعِ دو چیز در فارسی یعنی داشتنِ هر دوی آنها با همدیگر. بیت زیر از حافظ را مثال می‌زنم:
عشق و شباب و رندی، مجموعه‌ی مراد است
چون جمع شد معانی، گوی بیان توان زد

تعریف ۳. اگر p و q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، گزاره‌ی $p \to q$ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود.

p	q	$\mathrm{p} \to \mathrm{q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

توجه کنید که در سطر سوم و چهارم جدول ارزش بالا، می‌گوئیم که گزاره‌ی موردنظر به **انتفاء مقدم** درست است. در این حالت به محضِ دیدن فرض، تلاش برای یافتن درستی گزاره منتفی است! (یعنی گزاره درست است). این را در زبان روزمره را هم تا حدودی می‌توان دید. فرض کنید که کسی بگوید که «اگر سنگ سخن بگوید، اسب شتر است». این گزاره، با این که بی‌معنی به نظر می‌رسد، درست است! در واقع ما هیچگاه نیاز به تحقیق این نداریم که اسب شتر است، چون می‌دانیم که سنگ سخن نمی‌گوید! [1]

[1] شاید این را هم شنیده باشید که از فرض محال همه چیز نتیجه می‌شود.

تعریف ۴. اگر p و q دو گزاره در منطق گزاره‌ها باشند، گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ به صورت زیر معنا شناسی می‌شود.

p	q	p ↔ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

تعریف ۵. اگر p یک گزاره باشد $\neg p$ نیز یک گزاره است و به صورت زیر معنا شناسی می‌شود:

p	¬p
T	F
F	T

مثال ۶. جدول ارزش گزاره‌ی $\neg p \vee q$ را رسم کنید.

پاسخ.

p	q	¬p ∨ q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

□

توجه ۷. ستون آخر جداول ارزش دو گزاره‌ی $p \to q$ و $\neg p \vee q$ یکسانند. در این حالت می‌گوییم که دو گزاره‌ی $p \to q$ و $\neg p \vee q$ با هم **معادلند** (هم‌ارزند) و می نویسیم:

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

توجه ۸. عبارت زیر یک **گزاره** در **منطق گزاره‌ها نیست**.

$$(p \to q) \equiv \neg p \vee q$$

اگر خاطرتان باشید، هنگام معرفی نمادهای منطقی هیچگاه نگفتیم که در منطق گزاره‌ها، نماد $\equiv$ هم داریم. علامت $\equiv$ جزو نمادهای منطقی نیست. بنابراین عبارت $(p \to q) \equiv \neg p \vee q$ یک گزاره

نیست. در منطق گزاره‌ها چیزی گزاره حساب می‌شود که با نمادهای منطقی (ای که قبلا درباره‌شان صحبت کردیم) ساخته شده باشد. پس می‌گوییم که علامت $\equiv$ یک نماد «فرامنطقی» است که در زبان ریاضی روزمره از آن استفاده می‌کنیم. جمله‌ی زیر یک جمله در زبان روزمره است:

$$(p \to q) \equiv \neg p \vee q$$

معنی آن هم این است که «ستون آخر جدول ارزش گزاره‌ی سمت راست و چپ با هم یکسان است». چنین چیزی را توسط یک گزاره در خودِ منطق گزاره‌ها نمی‌توان نوشت و ما به عنوان موجوداتی که فرای آن منطق هستیم می‌توانیم درباره‌اش صحبت کنیم.

تمرین ۹. نشان دهید که در هر مورد گزاره‌های داده‌شده با هم معادلند:

۱. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

باید برای هر دو گزاره‌ی چپ و راست جدول بکشید و تحقیق کنید که ستون آخر هر دو جدول یکی است. برای کشیدن جدول، مثلاً برای گزاره‌ی سمت راست، باید اول تمام اجزایش برایتان مشخص شود (جدول زیر را پر کنید)

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$

برای گزاره‌ی سمت چپ نیز به طور مشابه جدول بکشید.

۲. $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

سوال ۱۰. آیا عبارت $p \to q \equiv \neg p \to \neg q$ درست است؟

راهنمایی. هم با جدول و هم با آوردن مثال نشان دهید که عبارت بالا درست نیست. □

مثال ۱۱. بیایید عبارت $p \to q$ را با هم کمی تحلیل کنیم. توجه کنید که عبارتهای زیر با هم هم‌معنیند:

- $p \to q$

- p شرط کافی برای q است. (اگر p آنگاه q)
- q شرط لازم برای p است. (تنها اگر q آنگاه p).

فرض کنید پدر علی (که حرفهایش همیشه درست است!) به علی گفته است که «اگر درس بخوانی موفق می‌شوی». از حرف پدر علی چه چیزی می‌توان استنباط کرد؟ بیایید این جمله را فرمولبندی ریاضی کنیم:

p : علی درس بخواند

q : علی موفق شود

پس سخن پدر علی، گزاره‌ی زیر است:

$p \to q$

به بیان دیگر، «به نظر پدر علی» درس خواندن شرط کافی برای موفق شدن است.
به نظر می‌آید که پدر علی در مورد عواقب درس نخواندن چیزی ادعا نکرده است؛ در واقع نگفته است که «اگر درس نخوانی موفق نمی‌شوی» یا «**تنها اگر** درس بخوانی موفق می‌شوی». پس گزاره‌ی زیر از سخن پدر علی نتیجه نمی‌شود:

$$\neg p \to \neg q.$$

به بیان دیگر، او نگفته است که **درس خواندن شرط لازم برای موفق شدن است** (به نظر او، از راههای دیگر هم می‌شود موفق شد!).
اما از طرفی دیگر، بنا به جمله‌ی پدر علی، اگر علی موفق نشود، می‌فهمیم که درس نخوانده بوده است. چون اگر درس می‌خواند، موفق شده بود. پس گزاره‌ی زیر از سخن پدر علی نتیجه می‌شود:

$$\neg q \to \neg p.$$

حال فرض کنیم که علی موفق شده است. از این لزوماً نتیجه نمی‌شود که علی درس خوانده است. پدر علی فقط گفته بود که اگر درس بخواند موفق می‌شود، ولی نگفته بود که تنها راه برای موفق شدن درس خواندن است. در واقع او نگفته بود که «موفق می‌شوی اگر و تنها اگر درس بخوانی». پس جمله‌ی زیر نیز از سخن پدر علی نتیجه نمی‌شود:

$$q \to p.$$

سوال ۱۲. آیا عبارت زیر درست است؟

$$\neg p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

تمرین ۱۳. جدول زیر را کامل کنید.

p	q	؟
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

گفتیم که $p \equiv q$ یعنی جدول ارزش دو گزاره‌ی p و q به ستون یکسانی ختم می‌شود.

تمرین ۱۴. نشان دهید که اگر

$$p \equiv q$$

آنگاه ستون آخر در جدول ارزش گزاره‌ی $p \leftrightarrow q$ تنها از علامت T تشکیل شده است.

در تعریف زیر از تمرین بالا ایده گرفته‌ایم.

تعریف ۱۵. ۱. گزاره‌ی p را یک **تاتولوژی** می‌خوانیم، هرگاه همواره (یعنی تحت هر نوع ارزشی که اجزاء آن داشته باشند) درست باشد.

مثال ۱۶. گزاره‌ی $p \vee \neg p$ یک تاتولوژی است.

p	¬p	$\neg p \vee p$
T	F	T
F	T	T

آنچه این مثال بیان کرده است را **اصلِ ردِّ شِقِّ ثالث** می‌خوانند. یعنی حالت سومی نیست، یا خود یک گزاره درست است یا نقیض آن.

۲. می گوییم گزاره‌ی p **مستلزم** گزاره‌ی q است، یا $p \to q$ یک **استلزام منطقی** است. هرگاه $p \to q$ تاتولوژی باشد، در اینصورت می‌نویسیم:

$$p \Rightarrow q$$

توجه ۱۷. علامت $\Rightarrow$ یک نماد منطقی نیست؛ پس عبارت زیر یک گزاره در منطق گزاره‌ها نیست:

$$p \Rightarrow q.$$

عبارت بالا یک جمله در زبان روزمره است بدین معنی که «گزاره‌ی $p \to q$ یک تاتولوژی است».

توجه ۱۸. به جای علامت $\equiv$ گاهی از علامت $\iff$ استفاده خواهیم کرد.

سوال ۱۹. فرق میان $p \to q$ و $p \Rightarrow q$ چیست؟

پاسخ. عبارت $p \to q$ یک گزاره در منطق گزاره‌ها است؛ ولی $p \Rightarrow q$ یک عبارت **فرا منطقی** در زبان روزمره است. عبارت $p \Rightarrow q$ گزاره محسوب نمی‌شود. $\square$

در زبان روزمره‌ی ریاضیات از کلمه‌ی «**قضیه**» به جای تاتولوژی استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۰. گزاره‌های زیر تاتولوژی هستند:

$$p \to p \tag{۱}$$

$$p \wedge q \to q \wedge p \tag{۲}$$

$$p \to p \wedge p \tag{۳}$$

$$p \wedge q \to q \tag{۴}$$

پس می توان نوشت:

$$p \Rightarrow p \tag{۵}$$

$$p \wedge q \Rightarrow q \wedge p \tag{۶}$$

$$p \Rightarrow p \wedge p \tag{۷}$$

$$p \wedge q \Rightarrow q \tag{۸}$$

توجه ۲۱. داریم $p \equiv q$ (یا $p \iff q$) هرگاه $p \leftrightarrow q$ یک تاتولوژی باشد.

تمرین ۲۲. ثابت کنید که

۱. $p \Rightarrow p \vee q$

اثبات. باید نشان دهیم که گزاره‌ی $p \to p \vee q$ یک تاتولوژی است.

p	q	$p \vee q$	$p \to p \vee q$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

□

۲. $p \wedge q \Rightarrow p$

۳. $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

تمرین ۲۳. قوانین دُمُرگان

۱. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

برای اثبات کردن عبارت بالا باید ثابت کنیم که $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ یک تاتولوژی است.

۲. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

تمرین ۲۴.

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \tag{۹}$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{۱۰}$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{۱۱}$$

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r \tag{۱۲}$$

$$(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \vee r \to q \vee s) \tag{۱۳}$$

$$(p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \wedge r \to q \wedge s) \tag{۱۴}$$

در مورد قضیه‌ی زیر در جلسه‌ی بعد صحبت خواهیم کرد.

قضیه ۲۵. ۱. $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$ قیاس استثنائی [۲]

[۲] modus ponens

۲. $(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ نفی تالی [۳]

۳. $(p \to q) \iff (p \wedge \neg q \to \underbrace{\perp}_{(p \wedge \neg p)})$ برهان خُلف [۴]

[۳] modus tollens

[۴] reductio ad absurdum