۱ جلسه‌ی نوزدهم، دوشنبه

۱.۱ متناهی و نامتناهی، شمارا و ناشمارا

در جلسه‌ی گذشته مفهوم همتوانی را تعریف کردیم. گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان می‌خوانیم، و این را به صورت $X \cong Y$ نشان دادیم، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد. واژه‌ی معادل همتوانی، هم‌اندازه بودن، یا هم‌کاردینال بودن است. پس در صورتی که دو مجموعه‌ی X, Y همتوان باشند از هر سه نماد زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\mathbf{card}(X) = \mathbf{card}(Y)$$

یا

$$|X| = |Y|$$

یا

$$X \cong Y.$$

به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد زوج همتوان هستند.

$$E \cong \mathbf{N}$$

$$\begin{array}{cccccc} ۰ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۰ & ۲ & ۴ & ۶ & ۸ & \dots \end{array}$$

گفتیم که یک مجموعه‌ی دلخواهِ X را **متناهی** می‌نامیم هرگاه همتوان با یک مجموعه‌ی $n = \{۰, ۱, \dots, n - ۱\}$ باشد؛ یعنی هرگاه $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشد که

$$X \cong \{۰, ۱, \dots, n\}.$$

همچنین یک مجموعه‌ی دلخواهِ X را نامتناهی می‌خوانیم هرگاه با هیچ $n \in \mathbb{N}$ همتوان نباشد؛ به بیان دیگر هرگاه متناهی نباشد.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با هیچ عدد طبیعی‌ای همتوان نیست (شما ثابت کنید) و از این رو، مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی، نامتناهی است. در بالا به نکته‌ی جالب دیگری اشاره کردیم: مجموعه‌ی اعداد طبیعی با یک زیرمجموعه‌ی سره از خودش (مجموعه‌ی اعداد زوج) همتوان است. در زیر با استفاده از این نکته، می‌خواهیم یک مشخصه‌ی کلی برای مجموعه‌های نامتناهی بیان کنیم.

گفتیم که یکی از اصول کلی علمی اقلیدس این بوده است که همواره کُل از جزء خودش بزرگتر است. این گفته، برای مجموعه‌های متناهی بوضوح درست است. انگار، دنیای اقلیدس دنیائی متناهی بوده است که در آن اصل یادشده مورد پذیرش بوده است؛ زیرا در دنیای نامتناهی‌ها (مانند مثال اعداد طبیعی) اصل یادشده به نظر درست نمی‌آید.

در قضیه‌ی زیر نشان داده‌ایم که به طور کلی، یک مجموعه‌ی داده‌شده‌ی X نامتناهی است اگروتنهااگر با بخشی از خودش همتوان باشد.

قضیه ۱. (در صورت پذیرش اصل انتخاب) مجموعه‌ی X نامتناهی است اگر و تنها اگر $Y \subsetneq X$ موجود باشد، به طوری که $X \cong Y$.

اثبات. فرض کنید مجموعه‌ی X نامتناهی باشد. عنصر $x_0 \in X$ را انتخاب کنید. مجموعه‌ی $X - \{x_0\}$ ناتهی است. پس عنصر $x_1 \in X - \{x_0\}$ را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $x_0, \ldots, x_n$ انتخاب شده باشند. دوباره $X - \{x_0, \ldots, a_n\}$ ناتهی است پس می‌توان $x_{n+1} \in X - \{x_0, \ldots, x_n\}$ را انتخاب کرد. بدین‌سان یک دنباله‌ی $A = \{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ از اعضای X انتخاب کرده‌ایم. واضح است که $X - \{x_0\}$ زیرمجموعه‌ی سره‌ای از X است. اگر ادعای زیر را ثابت کنیم، یک طرف حکم ثابت شده است.

ادعا: $X \cong X - \{x_0\}$

برای اثبات ادعا کافی است یک تابع یک به یک و پوشا مانند

$$f : X \to X - \{x_0\}$$

پیدا کنیم. اگر $x \in X$ آنگاه یا $x \in A$ یا $x \notin A$. اگر $x \in A$ آنگاه یک $n \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که $x = x_n$. پس نگاشت f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x_{n+1} & x = x_n \in A \\ x & x \notin A \end{cases}$$

ثابت کنید که تابع f یک به یک و پوشاست.

برای اثبات سمت دیگر قضیه باید نشان دهیم که هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای با جزئی از خودش همتوان نیست. این را نیز به راحتی می‌توان با استقراء ثابت کرد (بررسی کنید). □

نتیجه ۲. مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ نامتناهی است. (چون با بخشی از خودش همتوان است.)

N:	۰	۱	۲	۳	۴	...
E:	۰	۲	۴	۶	۸	...

تا کنون فهمیدیم که مجموعه‌ها، به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند؛ مجموعه‌های متناهی و مجموعه‌های نامتناهی. یک سوال طبیعی این است که آیا مجموعه‌های نامتناهی، همه هم‌اندازه‌ی هم هستند؟ در بالا دیدیم که $\mathbf{N}$ و $\mathbf{E}$ هم‌اندازه‌ی هم هستند؛ پس پرسیدن این سوال طبیعی است.

۲ دسته‌بندی نامتناهی‌ها

تعریف ۳. مجموعه‌ی X را **شمارای نامتناهی** می‌خوانیم هرگاه $X \cong \mathbf{N}$. در اینصورت می‌نویسیم:

$$\mathbf{card}(X) = \aleph_0$$

عبارت سمت راست بالا، الف‌صفر نام دارد. الف، حرف اول الفبای عبری است.

تعریف ۴. مجموعه‌ی X را **ناشمارای نامتناهی** می‌خوانیم هرگاه نامتناهی باشد ولی شمارا نباشد.

به تعریف ۳ دقت کنید. بنا به این تعریف، یک مجموعه‌ی داده شده، شمارای نامتناهی است هرگاه تابعی یک به یک و پوشا از $\mathbf{N}$ بدان مجموعه موجود باشد. به بیان دیگر، یک مجموعه‌ی X شمارای نامتناهی است هرگاه اعضای آن را بتوان توسط یک دنباله به صورت زیر نوشت:

$$X = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$

خودِ مجموعه‌ی $\mathbf{N}$ پس بدین دلیل شماراست که می‌توان نوشت:

$$\mathbf{N} = \{n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

همچنین مجموعه‌ی اعداد زوج شماراست زیرا

$$\mathbf{E} = \{۲n\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

حال طبیعی است از خودمان بپرسیم که آیا مجموعه‌ای پیدا می‌شود که نامتناهی باشد ولی اعضای آن را نتوان به صورت یک دنباله شمرد؟ تعریف ۴ انگار جواب این سوال را داده است! به مثال زیر دقت کنید:

مثال ۵. نشان دهید که بازه‌ی (۱ ,۰)، به عنوان زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی، ناشمارای نامتناهی است.

اثبات. اثبات این که این بازه، ناشماراست با شما؛ می‌توانید برای اثبات از قضیه‌ی ۶ استفاده کنید.

هر عدد در بازه‌ی (۱ ,۰) را می‌توان با یک بسط اعشاریِ شمارای نامتناهی نمایش داد. مثلاً

$$۰/۱۲۳۷۹۱۲\ldots$$

$$۰/۱۱۹۹۹۹۹\ldots$$

توجه کنید که عددی مانند

$$۰/۱۲$$

را توسط بسطِ

$$۰,۱۹۹۹۹۹۹۹\ldots$$

نشان می‌دهیم. بنابراین هر عدد حقیقی را می‌توان به طور یکتا با بسطی شمارا نشان داد (فهم دقیق این گفته، نیازمند گذراندن یک دوره‌ی آنالیز مقدماتی است).

حال به برهان خلف فرض کنید بازه‌ی (۱ ,۰) شمارا باشد. پس میان $\mathbf{N}$ و بازه‌ی (۱ ,۰) تناظر یک به یکی مانند زیر برقرار است.

$$\begin{array}{lllllll}
۰ & \to & ۰,a_{۰۰} & a_{۰۱} & a_{۰۲} & a_{۰۳} & \ldots \\
۱ & \to & ۰,a_{۱۰} & a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \ldots \\
۲ & \to & ۰,a_{۲۰} & a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \ldots \\
\vdots & & & & & & \\
\mathrm{n} & \to & ۰,a_{n۰} & a_{n۱} & a_{n۲} & a_{n۳} & \ldots
\end{array}$$

از آنجا که تناظر بالا یک به یک است، پس تمام اعداد حقیقی در بالا لیست شده‌اند.

عدد زیر را در نظر بگیرید.

...	عددی بین صفر تا ۹ به غیر از a_{22}	عددی بین صفر تا ۹ به غیر از a_{11}	عددی بین صفر تا ۹ به غیر از a_{00}

/صفر

عدد بالا در بازه‌ی $(0,1)$ است اما در لیست بالا گنجانده نشده است. پس این فرض که همه‌ی اعداد موجود در بازه‌ی $(0,1)$ در بالا لیست شده‌اند، درست نیست. بنابراین بازه‌ی $(0,1)$ ناشماراست. $\square$

پس دیدیم که بازه‌ی $(0,1)$ شمارای نامتناهی است. در واقع، این بازه از تمام اعداد طبیعی بیشتر عنصر دارد و اعضایش آنقدر زیاد است که نمی‌توان آنها را توسط یک دنباله‌ی شمارا نمایش داد.

لم ۶. اگر $a \neq b$ آنگاه

$$(a,b) \cong (0,1).$$

اثبات. کافی است یک تناظر یک به یک بین بازه‌ی (a,b) و بازه‌ی $(0,1)$ پیدا کنیم. برای این کار، کافی است معادله‌ی خطی را بیابیم که از نقاط $(a,0)$ و $(b,1)$ می‌گذرد. $\square$

پس همه‌ی بازه‌های باز، هم‌اندازه‌اند و همه‌ی آنها نامتناهی و ناشمارا هستند. در زیر نشان داده‌ایم که کُلِّ $\mathbb{R}$ نیز هم‌اندازه‌ی بازه‌ی $(0,1)$ است. پس $\mathbb{R}$ ناشمارای نامتناهی است.

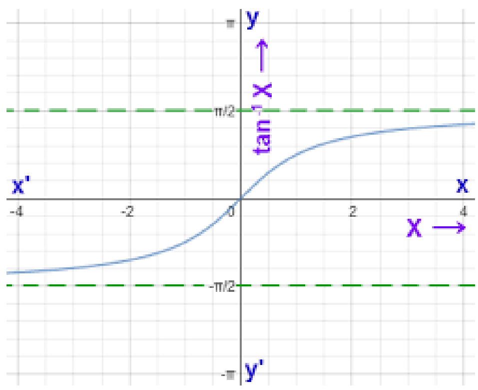
مثال ۷. $\mathbf{R} \cong (0,1)$

پاسخ. بنا به لم قبل کافی است یک بازه پیدا کنیم که با $\mathbb{R}$ همتوان باشد. تابعِ

$$f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

یک تابع یک به یک و پوشاست. پس

$$\mathbb{R} \cong (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cong (0,1)$$



$\square$

در جلسات آینده اندازه‌ی مجموعه‌های مختلفی را بررسی خواهیم کرد.

خلاصه‌ی درس: مجموعه‌ها یا متناهیند یا نامتناهی. مجموعه‌های نامتناهی یا شمارا هستند یا ناشمارا.

درس را با قضیه‌ی زیر به پایان می‌بریم:

قضیه ۸. مجموعه‌ی دلخواهِ X نامتناهی است اگروتنها اگر شامل یک زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی باشد.

اثبات. اثبات قضیه‌ی ۱ را (به دقت) بخوانید. اگر X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی A که در اثبات قضیه‌ی یادشده ساخته شد، شمارای نامتناهی است و $A \subseteq X$. $\square$