۱ جلسه‌ی هجدهم، شنبه

۱.۱ توابع

توجه ۱. به یک تابعِ یک به یک و پوشا، یک **تناظر یک به یک** یا یک تابع **دوسوئی** گفته می‌شود.

قضیه ۲. اگر تابع $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد، آنگاه تابع یکتای $g : Y \to X$ چنان موجود است که

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

و

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = y$$

توجه ۳. تابع g در قضیه‌ی بالا را تابع وارون f می‌خوانیم و با f^{-1} نمایش می‌دهیم.

اثبات. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد. عمل $g : Y \to X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

ـ عنصر دلخواه $y_0 \in Y$ را در نظر بگیرید. از آنجا که f پوشاست، عنصر $x_0 \in X$ چنان موجود است که $f(x_0) = y_0$.

ـ تعریف می کنیم: $g(y_0) = x_0$. توجه کنید که

۱. $Dom(g) = Y$

۲. g یک تابع از Y به X است.

برای اثبات مورد دوم باید نشان دهیم که هرگاه $y_1 = y_2$ آنگاه $g(y_1) = g(y_2)$.

فرض کنید $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. از فرض $y_1 = y_2$ نتیجه می‌شود که $f(x_1) = f(x_2)$. از آنجا که f یک به یک است داریم $x_1 = x_2$. پس $g(y_1) = g(y_2)$.

تمرین ۴. نشان دهید g یک به یک و پوشاست.

اثبات اینکه

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

فرض کنید $x_{0} \in X$ عنصر دلخواهی باشد. اگر $y_{0} = f(x_{0})$ طبق تعریف داریم

$$g(y_{0}) = x_{0}.$$

یعنی

$$g \circ f(x_{0}) = x_{0}.$$

اثبات این که

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = id_Y$$

به عهده‌ی شما.

اثبات یکتایی. فرض کنید $g_{1} : Y \to X$ و $g_{2} : Y \to X$ به گونه‌ای باشند که $f \circ g_{1}(y) = Id_Y$ و $g_{1} \circ f(x) = Id_X$ و $f \circ g_{2}(y) = Id_Y$ و $g_{2} \circ f(x) = Id_X$. باید ثابت کنیم که $g_{1} = g_{2}$. برای این منظور باید نشان می‌دهیم:

$$\forall y \in Y \quad g_{1}(y) = g_{2}(y).$$

فرض کنید $y_{0} \in Y$ عنصری دلخواه باشد. باید نشان دهیم که

$$g_{1}(y_{0}) = g_{2}(y_{0})$$

از آنجا که f پوشاست، عنصر $x_{0} \in X$ چنان موجود است که

$$f(x_{0}) = y_{0}$$

داریم:

$$g_{1}(y_{0}) = g_{1}\big(f(x_{0})\big)$$

بنا به فرض $g_{1} \circ f(x) = Id_X$ داریم:

$$g_{1}(y_{0}) = g_{1}\big(f(x_{0})\big) = x_{0}.$$

و بنا به فرض $g_۲ \circ f(x) = Id_X$ داریم:

$$g_۲(y_۰) = g_۲\big(f(x_۰)\big) = x_۰$$

پس $g_۱(y_۰) = g_۲(y_۰)$. □

تمرین ۵. نشان دهید که عکس قضیه‌ی بالا نیز درست است؛ یعنی اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه اگر تابعی از $g : Y \to X$ یافت شود به طوری که

$$\forall x \in X \quad g \circ f(x) = x$$

و

$$\forall y \in Y \quad f \circ g(y) = y$$

آنگاه f یک به یک و پوشاست.

تمرین ۶. نشان دهید که اگر تابعی یک به یک از X به Y موجود باشد آنگاه تابعی پوشا از Y به X موجود است.

قضیه ۷. اگر از X به Y یک تابع پوشا موجود باشد آنگاه یک تابع یک به یک از Y به X موجود است.

اثبات. برای عنصرِ $y \in Y$، تعریف کنید:

$$A_y = f^{-۱}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$$

خانواده‌ی نامتناهی زیر از مجموعه‌ها را در نظر بگیرید:

$$\{f^{-۱}(y)\}_{y \in Y}$$

در اینجا می‌خواهیم تابعی مانند $g : Y \to X$ را تعریف کنیم. برای هر عنصر در Y می‌توانیم $g(y)$ را عنصری در $f^{-۱}(y)$ بگیریم؛ یعنی بگوییم برای هر عنصر $y \in Y$ عنصری در $f^{-۱}(y)$ را به عنوان $g(y)$ انتخاب کنید. این تعریف برای یک تابع، تعریف مبهمی است. در واقع تابع بودن این عمل، جای تردید دارد زیرا خروجی این عمل چندان مشخص نیست. یعنی اگر من یک y به شما بدهم

شما به من می‌گویید که عنصری در $f^{-1}(y)$ را انتخاب کن و آن را $g(y)$ بنام. اما اگر دوباره همان y را به شما بدهم، دوباره به من خواهید گفت که عنصری در $f^{-1}(y)$ را به عنوان $g(y)$ انتخاب کن! شاید این عنصر، عنصر دیگری شود!
در این جا تنها یکی از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌تواند به دادمان برسد! بنا به اصل انتخاب یک **تابع انتخاب** g از Y به $\{X = f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ موجود است به طوری که

$$\forall y \in Y \quad g(y) \in f^{-1}(y)$$

پس

$$f : I \to \bigcup A_i \Rightarrow f(i) \in A_i$$

تنها یک بخش از قضیه باقی مانده است و آن این است که ثابت کنیم که تابع g یک به یک است. اثبات این قسمت، به عهده‌ی شما باشد! [1]

۲.۱ اصل انتخاب

در قضیه‌ی قبل از اصل انتخاب استفاده کردیم. لازم است که این اصل را کمی توضیح بدهم.
در درسهای ابتدائی دیدیم که یکی از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها، اصل انتخاب است. در صورت نپذیرفتن اصل انتخاب، بخش مهمی از ریاضی از بین خواهد رفت. این اصل آنچنان به صورت طبیعی برای ما پذیرفته شده است که گاهی بی آنکه متوجه شویم از آن در اثباتهامان استفاده می‌کنیم.
اگر تعدادی متناهی مجموعه‌ی ناتهی داشته باشیم می‌توانیم از هر یک از آنها یک عضو انتخاب کنیم. برای این انتخاب، نیازی به اصل انتخاب نداریم. در واقع اگر $A_1, \ldots, A_n \neq \emptyset$ آنگاه

$$\exists x_1, \ldots x_n \quad x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots x_n \in A_n$$

اما وقتی تعداد مجموعه‌هامان متناهی نباشد، حساب کاملاً متفاوت است.
فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد. حاصلضرب این خانواده را با نماد $\Pi_{i \in I} A_i$ نمایش می‌دهیم.

$$\Pi_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} | x_i \in A_i\}$$

[1] کاندیدائی مناسب برای سوال امتحان!

معادلاً می‌توان از عنصرِمتعلق به $\Pi_{i\in I}A_i$ را تابعی از I به $\cup A_i$ دانست که بُردِ آن به صورت دنباله نوشته شده است.

$$\overset{a_۱\in A_۱}{۱}\quad \overset{a_۲\in A_۲}{۲}\quad \overset{a_۳\in A_۳}{۳}\quad \ldots \quad \overset{a_i\in A_i}{i}\quad \ldots$$

اصل انتخاب می‌گوید که اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های **ناتهی** باشد آنگاه

$$\Pi_{i\in I}A_i \neq \emptyset$$

به بیان دیگر اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌ها باشد، آنگاه **تابعی** موجود است که از هر یک از آنها یک عنصر بر می‌دارد.

$$\exists f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \quad \forall i \in I \quad f(i)\in A_i$$

$\square$

۳.۱ ادامه‌ی همتوانی

گفتیم که دو مجموعه‌ی X و Y را همتوان می‌خوانیم و می‌نویسیم:

$$X \cong Y$$

هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد.
همتوانی یک رابطه‌ی هم ارزی روی کلاس مجموعه‌هاست؛ یعنی [2]

۱. اگر X یک مجموعه باشد آنگاه $X \cong X$

۲. اگر $X \cong Y$ آنگاه $Y \cong X$

۳. اگر $X \cong Y$ و $Y \cong Z$ آنگاه $X \cong Z$

[2] با این کلاس همه ی مجموعه‌ها یک مجموعه نیست ولی مفهوم رابطه‌ی هم‌ارزی برای کلاسها نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

پس بنا بر آنچه درباره‌ی رابطه‌ی هم‌ارزی آموخته‌ایم، رابطه‌ی همتوانی ($\cong$) کلاس همه‌ی مجموعه‌ها را افراز می‌کند. کلاس مجموعه‌ی X را با $\mathbf{card}(X)$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی X را متناهی می‌نامیم هرگاه $n \in \mathbf{N}$ موجود باشد به طوری که

$$X \cong n = \{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$$

اگر $X \cong n$ می نویسیم

$$\mathbf{card}(X) = n$$

$\emptyset$	۱	۲	$\ldots$	$[\mathbf{N}]$	$\ldots$

شکل بالا افراز تمام مجموعه‌ها را به کلاس کاردینال‌ها نشان می دهد .در این افراز اولین خانه از سمت چپ نشان دهنده‌ی کلاس همه‌ی مجموعه‌های صفر عضوی است. خانه‌ی بعد از آن (حرکت به سمت راست) نشان دهنده‌ی کلاس همه‌ی مجموعه‌های یک عضوی است و بقیه نیز به همین ترتیب.

$$۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, \underbrace{\mathbf{card}(\mathbf{N})}_{=\aleph_۰}, \ldots$$

در واقع جدول بالا، کلاسی تازه از اعداد را به ما نشان می‌دهد که به آن اعداد کاردینالها گفته می‌شود. در درسهای آینده درباره‌ی این اعداد جدید بسیار گفتگو خواهیم کرد. خواهیم دید که این اعداد نیز با یکدیگر قابل مقایسه‌اند و حتی می‌توان آنها را با هم جمع و ضرب نیز کرد.