۱ جلسه‌ی هفدهم ، دوشنبه ۹۷/۱/۲۷

تمرین ۱. فرض کنید R و S دو رابطه هم ارزی باشند روی مجموعه X. نشان دهید که $R \circ S$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X است اگر و تنها اگر $R \circ S = S \circ R$.[۱]

۱.۱ ادامه‌ی مبحث توابع

مثال ۲. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند و $b \in Y$ عنصر ثابتی باشد. عمل زیر یک تابع است:

$$f : X \to Y$$

$$x \mapsto b.$$

به تابع بالا، یک تابع ثابت گفته می‌شود. نشان دهید که تابع بالا در حالت کلی یک به یک و پوشا نیست.

مثال ۳. فرض کنید X یک مجموعه باشد و $A \subseteq X$ یک زیرمجموعه‌ی ثابت باشد. عمل زیر یک تابع است:

$$f : A \to X$$

$$x \mapsto x$$

تابع بالا را تابع **مشمولیت** می‌خوانیم. در این مثال اگر $A = X$ آنگاه تابع f را همانی می خوانیم و آن را با id_X نشان می‌دهیم.

$$id_X : X \to x$$

$$x \mapsto x$$

مثال ۴. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. تابع f را از $P(X) \times P(X)$ به $P(X)$ با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$f : P(X) \times P(X) \to P(X)$$

$$(A, B) \mapsto A \cup B$$

آیا تابع فوق یک به یک است؟
اگر f یک به یک باشد آنگاه باید از

$$f(A_۱, B_۱) = f(A_۲, B_۲)$$

نتیجه شود که

$$(A_۱, B_۱) = (A_۲, B_۲)$$

یعنی از

$$A_۱ \cup B_۱ = A_۲ \cup B_۲$$

[۱] هر که این تمرین را بدون نگاه کردن به جزوه و به صورت کاملاً بدون اشکال در اتاق من به صورت شفاهی حل کند، ۱ نمره می‌گیرد. تمرین، دشوار نیست، ولی نحوه‌ی نوشتن پاسخ جزو اهداف است.

باید نتیجه شود که $A_۱ = A_۲, B_۱ = B_۲$

فرض کنید $A_۱ \neq \emptyset$. داریم: $f(A_۱, \emptyset) = f(\emptyset, A_۱)$. ولی $(A_۱, \emptyset) \neq (\emptyset, A_۱)$. پس این تابع یک به یک نیست.

تابع مثال قبل پوشاست. فرض کنید $Y \in P(X)$. برای اثبات پوشا بودن تابع، باید مجموعه‌های $A, B \in P(X)$ را طوری پیدا کنیم که $f(A, B) = Y$.

واضح است که $Y \cup \emptyset = f(Y, \emptyset) = Y$

مثال ۵. فرض کنید X, Y دو مجموعه باشند. عمل زیر را در نظر بگیرید:

$$\pi_X : X \times Y \to X$$

$$(x, y) \mapsto x$$

عمل بالا یک تابع است که بدان **تابع تصویر روی مؤلفه‌ی اول** گفته می‌شود. نشان دهید که تابع π_x یک به یک نیست، ولی پوشاست.

به طور مشابه تابع

$$\pi_y : (X, Y) \to Y$$

$$(x, y) \mapsto y$$

تعریف می‌شود که آن را تابع تصویر روی مؤلفه‌ی دوم می‌خوانیم.

تعریف ۶.
- فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ یک زیرمجموعه‌ی دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(A) : \{f(x) | x \in A\}$$

- فرض کنید $B \subseteq Y$؛ تعریف می‌کنیم:

$$f^{-۱}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

توجه ۷. ادعا نکرده‌ایم که f دارای وارون است. مبادا نماد $f^{-۱}$ موجب ابهام شود.

توجه ۸. نشان دهید که $A \subseteq f^{-۱}(f(A))$.

فرض ها :

$$f : X \to Y$$

تابع است و

$$A \subseteq X.$$

برای آنکه ثابت کنیم $A \subseteq f^{-۱}(f(A))$ باید ثابت کنیم که

$$\forall x \in X \quad \big(x \in A \to x \in f^{-۱}(f(A))\big)$$

فرض می کنیم $x_0 \in A$ عنصر دلخواهی باشد باید ثابت کنیم

$$x_0 \in f^{-1}(f(A))$$

و طبق تعریفِ f^{-1} برای این منظور باید ثابت کنیم که

$$f(x_0) \in f(A)$$

و این طبق تعریفِ f واضح است زیرا $x_0 \in A$.

سوال ۹. آیا لزوماً $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$؟

می‌دانیم که

$$x_0 \in f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(x_0) \in f(A)$$

در مثال زیر نشان داده‌ایم که عبارت بیان شده لزوماًبرقرار نیست. فرض کنید

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

و تابع

$$f : X \to X$$

را چنان در نظر بگیرید که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) = 1$. فرض کنید

$$A = \{1, 2\}.$$

داریم

$$f(A) = \{1\}$$

$$f^{-1}(f(A)) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

تمرین ۱۰. نشان دهید اگر f یک به یک باشد $f^{-1}(f(A)) = A$

تمرین ۱۱. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $B \subseteq Y$ نشان دهید $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

تمرین ۱۲. نشان دهید اگر f پوشا باشد آنگاه $f(f^{-1}(B)) = B$

تمرین ۱۳. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع دلخواه باشد. نشان دهید که

$$A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

$$C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

تمرین ۱۴. نشان دهید که تابع $f : X \to Y$ یک به یک است اگر و تنها اگر

$$\forall A, B \subseteq X \quad f(A - B) = f(A) - f(B).$$

اثبات. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک به یک باشد و A_0, B_0 دو مجموعه دلخواه از X باشند. باید نشان دهیم

$$f(A_0 - B_0) = f(A_0) - f(B_0)$$

پس باید نشان دهیم که

$$f(A_0 - B_0) \subseteq f(A_0) - f(B_0)$$

و

$$f(A_0) - f(B_0) \subseteq f(A_0 - B_0)$$

اثبات عبارت اول:

فرض می کنیم $y_0 \in f(A_0 - B_0)$ بنابراین $x_0 \in A_0 - B_0$ چنان موجود است که $f(x_0) = y_0$.

ازآنجا که $x_0 \in A_0$ داریم $f(x_0) \in f(A_0)$

از آنجا که $x_0 \notin B_0$ ادعا می کنیم $f(x_0) \notin f(B_0)$

اثبات ادعا : اگر $f(x_0) \in f(B_0)$ آنگاه $x'_0 \in B_0$ موجود است به طوریکه $f(x'_0) = f(x_0)$ از آنجا که تابع f یک به یک است

$$x_0 = x'_0 \in B_0.$$

و این با فرض $x_0 \notin B_0$ تناقض دارد. پس $f(x_0) \notin f(B_0)$. پس $f(x_0) \in f(A_0) - f(B_0)$. اثبات عبارت دوم و اثبات قسمت عکس این مسأله به عهده‌ی شما. □

تمرین ۱۵. فرض کنید $D \subseteq X \times Y$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. نشان دهید که

$$\pi_X(D) = \{x \in X | \exists y \in Y \quad (x, y) \in D\}.$$