۱ جلسه‌ی پانزدهم، شنبه

در جلسات قبل گفتیم که اگر X و Y مجموعه باشند، آنگاه هر زیر مجموعه از $P(X \times Y)$ یک رابطه از X به Y است.

مثال ۱. فرض کنید $\mathbf{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد. قرار دهید

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^۲ | y = x^۲\}$$

دقت کنید که R نمونه‌ای از یک رابطه روی $\mathbf{R}$ است.

نیز گفتیم که از میان روابط، روابط هم‌ارزی برای ما اهمیت ویژه‌ای دارند. از آنها می‌شود برای دسته‌بندی (افراز) استفاده کرد. اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد تعریف کردیم:

$$X/R = \{[x] | x \in R\}$$

که در آن:

$$[x] = \{y \in X | xRy\}$$

نیز ثابت کردیم که

$$[x] = [y] \iff xRy$$

و

$$[x] \cap [y] = \emptyset \iff x\not{R}y$$

با حذف تکرارها، X/R را به عنوان یک مجموعه در نظر می‌گیریم.

مثال ۲. روی یک مجموعه‌ی X رابطه‌ی تساوی، $(=)$، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

$$R \subseteq X \times X$$

$$xRy \iff x = y$$

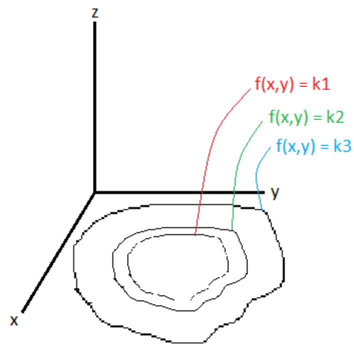
$$X/_{=} = \{[x]_{=} | x \in X\} = \Big\{\{x\} | x \in X\Big\}$$

مثال ۳. اگر

$$z = f(x, y)$$

یک تابع دو متغیره باشد، رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

$$(x, y)R(x', y') \iff f(x, y) = f(x', y')$$



رابطه‌ی فوق یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و X/R مجموعه‌ی تمام منحنی‌های تراز تابع f است (که در واقع افرازی برای دامنه‌ی این تابع هستند).

۱.۱ افراز و رابطه‌ی آن با رابطه‌ی هم‌ارزی

در خلال جلسات گذشته درباره‌ی افراز صحبت کردیم بدون آنکه آن را رسماً تعریف کرده باشیم. در ادامه‌ی درس، افرازها را خواهیم شناساند و خواهیم دید که مفهوم افراز **در تناظر یک به یک** با مفهومِ رابطه‌ی هم‌ارزی است.

فرض کنید X یک مجموعه باشد. مجموعه‌ی $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ را یک افراز برای X می‌خوانیم هرگاه

۱. $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B = X$

۲. $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad (A \neq B \to A \cap B = \emptyset)$

۳. $\forall A \in \mathcal{A} \quad A \neq \emptyset$

مثال ۴. تمام افرازهای مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳\}$ را بنویسید.

پاسخ.

$$\{\{۱\}, \{۲, ۳\}\}, \{\{۲\}, \{۱, ۳\}\},$$
$$\{\{۳\}, \{۱, ۲\}\}, \{\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}\},$$
$$\{\{۱, ۲, ۳\}\}$$

□

مثال ۵. یک نمونه افراز از مجموعه‌ی $\mathbf{N} - \{۰\}$ به صورت زیر است

اعداد فرد	اعداد زوج مخالف صفر

$$\mathbf{N} - \{۰\} = \{\text{اعداد زوج مخالف صفر}\} \cup \{\text{اعداد فرد}\}$$

از هر رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان به یک افراز رسید:

قضیه ۶. اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد، آنگاه X/R یک افراز X است.

اثبات. نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی X/R تمام ویژگی‌های یک افراز برای مجموعه‌ی X را داراست.
در جلسه‌ی گذشته گفتیم که

$$\bigcup X/R = X$$

همچنین می‌دانیم که

$$[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$$

زیرا جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که اگر $[x] \neq [y]$ آنگاه $x \not{R} y$ و از این هم نتیجه می‌شود که

$$[x] \cap [y] = \emptyset$$

همچنین به دلیل آنکه R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است پس R انعکاسی است؛ بنابراین برای هر $x \in X$ داریم

$$x \in [x]$$

پس

$$\forall x \in X \quad [x] \neq \emptyset$$

□

در قضیه‌ی بالا دیدیم که از رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان به افراز رسید. در زیر نشان داده‌ایم که هر افراز، از یک رابطه‌ی هم‌ارزی نشأت گرفته است:

قضیه ۷. فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ افرازی برای مجموعه‌ی X باشد. آنگاه یک رابطه‌ی هم‌ارزی R روی X چنان یافت می‌شود که

$$X/R = \mathcal{A}$$

اثبات. داشته‌ها: افرازِ $\mathcal{A}$ برای X
هدف:
پیدا کردن یک رابطه‌ی R روی X به طوری که

$$X/R = \mathcal{A}$$

بیایید رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$xRy \iff$$

$\iff$ x و y هر دو در یک مجموعه‌ی یکسان در افراز $\mathcal{A}$ واقع شده باشند؛ یعنی هم‌دسته باشند

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

سوال ۸. چه چیزهایی باید ثابت کنیم؟

باید ثابت کنیم که

۱. رابطه‌ی R در بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲. $X/R = \mathcal{A}$

اثبات قسمت اول. نخست ثابت می‌کنیم که R انعکاسی است.

فرض کنید $x \in X$ عنصر دلخواهی باشد. آنگاه از آنجا که $X = \bigcup \mathcal{A}$ می‌دانیم که $x \in \bigcup \mathcal{A}$. پس $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x \in A$. پس $x \in A$ و $x \in A$ یعنی xRx پس R انعکاسی است.

دوم ثابت می‌کنیم که R تقارنی است.

فرض کنید xRy آنگاه

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad x, y \in A$$

به بیان دیگر

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad y, x \in A$$

پس yRx پس R تقارنی است.

سوم ثابت می‌کنیم که R تعدی نیز دارد.

فرض کنید xRy و yRz. پس مجموعه‌ی $A \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $x, y \in A$ و مجموعه‌ی $B \in \mathcal{A}$ موجود است به طوری که $y, z \in B$ پس داریم

$$y \in A \cap B$$

از آنجا که $\mathcal{A}$ یک افراز است اگر $A \neq B$ آنگاه $A \cap B = \emptyset$. در بالا دیدیم که

$$A \cap B \neq \emptyset$$

بنابراین $A = B$ پس $x, z \in A = B$. یعنی xRz.

اثبات قسمت دومِ حکم:

$$X/R = \mathcal{A}$$

توجه کنید که هم X/R و هم $\mathcal{A}$ مجموعه‌هائی از مجموعه‌ها هستند. نخست ثابت می‌کنیم که $\mathcal{A} \subseteq X/R$.

فرض کنید $A \in \mathcal{A}$ می‌دانیم که

$$X/R = \{[x] | x \in X\}$$

کافی است ثابت کنیم که $x. \in X$ چنان موجود است که $A = [x.]$. توجه کنید که A ناتهی است (طبق تعریف افراز). فرض کنید $x.$ یک عضو دلخواه باشد از A باشد. ادعا می‌کنیم که

$$[x.] = A.$$

داریم

$$[x.] = \{y | yRx.\} = \{y | y, x. \in A\} = \{y | y \in A\} = A$$

تا اینجا ثابت کردیم که

$$\mathcal{A} \subseteq X/R$$

اثبات اینکه $(*) \quad X/R \subseteq \mathcal{A}$.

فرض کنید $[x_0] \in X/R$. می‌دانیم که $A \in \mathcal{A}$ موجود است که $x_0 \in A$؛ زیرا $X/R = \bigcup \mathcal{A}$.) به طور مشابه با بالا ثابت کنید که $A = [x_0]$. پس

$$[x_0] \in \mathcal{A}$$

بنابراین ثابت کردیم که

$$X/R \subseteq \mathcal{A} \quad (**)$$

پس بنا به $(*)$ و $(**)$ داریم $X/R = \mathcal{A}$. □

تمرین ۹. آیا می‌توانید یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی مجموعه‌ی $\mathbf{N} - \{0\}$ تعریف کنید به طوری که

$$\mathbf{N} - \{0\}/R = \{\{\text{اعداد فرد}\}, \{\text{اعداد زوج مخالف صفر}\}\}$$

پاسخ. رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \iff x \equiv_2 y.$$

□

فرض کنید $\mathcal{M}$ مجموعه‌ی تمام روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. نیز فرض کنید $\mathcal{N}$ مجموعه‌ی تمام افرازهای مجموعه‌ی X باشد. از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}$ یک تابع f را به صورت زیر تعریف کنید: اگر $R \in \mathcal{M}$ آنگاه $f(R) = X/R$. قضیه‌ی ۷ در واقع به ما می‌گوید که تابع f تابعی پوشاست. در جلسه‌ی بعد ثابت خواهیم کرد که تابعِ f یک‌به‌یک نیز هست.