۱ جلسه‌ی چهاردهم، دوشنبه

۱.۱ رابطه‌ی هم‌ارزی

به رابطه‌ای که ویژگی‌های **انعکاسی، تقارنی و تعدی** داشته باشد، یک **رابطه‌ی هم‌ارزی** گفته می‌شود. از روابط هم‌ارزی برای **تقسیم‌بندی** یک مجموعه استفاده می‌شود. برای مثال، مجموعه‌ی همه‌ی دانشجویان یک کلاس را در نظر بگیرید. رابطه‌ی همقد بودن یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. افراد حاضر در این کلاس را می‌توان بر اساس رابطه‌ی هم‌قد بودن تقسیم‌بندی (یا افراز) کرد. برای این کار کافی است افرادی را که هم‌قد هستند، همگروه کرد. توجه کنید که هر گروه (هر قد)، دارای نماینده‌ای است، اما فرقی نمی‌کند کدام شخص از آن گروه را به عنوان نماینده انتخاب کرد. به بیان دیگر، اگر x,y دو فرد همقد باشند، آنگاه مجموعه‌ی افراد همقدِ x دقیقاً همان مجموعه‌ی افرادِ همقدِ y است. همچنین اگر x,y همقد نباشند، آنگاه مجموعه‌ی افراد همقد با x هیچ اشتراکی با مجموعه‌ی افراد همقد با y ندارد. در سرتاسرِ درس این جلسه، مثال همقد بودن را در ذهن داشته باشید و نمودِ آن را در تمام اثباتها بیابید.

فرض کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. فرض کنید $x_. \in X$ عنصری دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\{y \in X | xRy\} = \{y \in X | yRx\} = [x_.]_R = \text{کلاس هم‌ارزی عنصر } x_. \text{ تحت رابطه‌ی } R$$

فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد. خانواده‌ی زیر از مجموعه‌ها را در نظر بگیرید:

$$\{[x]_R | x \in X\}$$

قضیه ۱. فرض کنید $x_. \not R y_.$ آنگاه

$$[x_.] \cap [y_.] = \emptyset$$

اثبات. کافی است بنا به تاتولوژی

$$\neg q \to \neg p \iff p \to q$$

ثابت کنیم که اگر $[x_.] \cap [y_.] \neq \emptyset$ آنگاه $x_. R y_.$. فرض کنید $[x_.] \cap [y_.] \neq \emptyset$. فرض کنید $z_. \in [x_.] \cap [y_.]$. از آنجا که $z_. \in [x_.]$ و $[x_.] = \{y | yRx_.\}$ نتیجه می‌گیریم که

$$z_. R x_. \quad (۱)$$

و به طور مشابه، از اینکه $z_. \in [y_.]$ نتیجه می‌گیریم که

$$z_. R y_. \quad (۲)$$

از آنجا که R تقارنی است از (۱) نتیجه می‌شود که

$$x_. R z_. \quad (۳)$$

بنا به متعدی بودن R از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که

$$x_. R y_.$$

بیایید همین اثبات را بار دیگر به صورت استنتاجی بنویسیم:

$$① \quad [x.] \cap [y.] \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \quad z \in [x.] \cap [y.]$$

$$z. \in [x.] \cap [y.] \quad \text{فرض می‌کنیم}$$

$$② \quad z. \in [x.] \cap [y.] \Rightarrow (z. \in [x.]) \wedge (z. \in [y.])$$

$$③ \quad z. \in [x.] \Rightarrow z.Rx.$$

$$④ \quad z. \in [y.] \Rightarrow z.Ry.$$

$$⑤ \quad z.Rx. \overset{\text{تقارنی}}{\Rightarrow} x.Rz.$$

$$⑥ \quad (x.Rz.) \wedge (z.Ry.) \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} x.Ry.$$

$$⑦ \quad [x.] \cap [y.] \neq \emptyset \Rightarrow x.Ry. \quad \text{بنا به ۱ تا ۶}$$

□

قضیه ۲. اگر

$$[x.] \cap [y.] = \emptyset$$

آنگاه

$$x.\not R y.$$

اثبات. ثابت می‌کنیم که اگر $x.Ry.$ آنگاه

$$[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$$

اگر $x.Ry.$ آنگاه بنا به تعریفِ $[y.]$ داریم

$$x. \in [y.] ①$$

همچنین از از آنجا که R انعکاسی است داریم

$$x.Rx.$$

پس

$$x. \in [x.] ②$$

از ① و ② نتیجه می‌گیریم که

$$x. \in [x.] \cap [y.]$$

بنابراین

$$[x.] \cap [y.] \neq \emptyset$$

□

نتیجه ۳.

$$x_\cdot \not R y_\cdot \iff [x_\cdot] \cap [y_\cdot] = \emptyset$$

$$x_\cdot R y_\cdot \iff [x_\cdot] \cap [y_\cdot] \neq \emptyset$$

قضیه ۴. اگر $[x_\cdot] \cap [y_\cdot] \neq \emptyset$ آنگاه

$$[x_\cdot] = [y_\cdot]$$

اثبات. فرض کنید که $[x_\cdot] \cap [y_\cdot] \neq \emptyset$. می‌خواهیم ثابت کنیم که در این صورت، $[x_\cdot] \subseteq [y_\cdot]$ و $[y_\cdot] \subseteq [x_\cdot]$.
فرض کنید که $z \in [x_\cdot]$. پس

$$zRx_\cdot \quad (۱).$$

از آنجا که $[x_\cdot] \cap [y_\cdot] \neq \emptyset$ بنا به قضیه‌ی قبل داریم

$$x_\cdot R y_\cdot \quad (۲).$$

بنا به (۱)و(۲) و تعدی، نتیجه می‌گیریم که

$$zRy_\cdot.$$

پس $z \in [y_\cdot]$. از آنجا که z به صورت دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که

$$[x_\cdot] \subseteq [y_\cdot].$$

به طور مشابه شما ثابت کنید که $[y_\cdot] \subseteq [x_\cdot]$. □

فرض کنید که R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. تعریف می‌کنیم:

$$X/R = \{[x] | x \in X\}.$$

توجه کنید که X/R در تعریف بالا یک خانواده از مجموعه‌هاست؛ زیرا برخی از اعضای آن می‌توانند تکراری باشند. همان طور که دیدیم اگر xRy آنگاه $[x] = [y]$. با این حال، این خانواده، در واقع یک مجموعه هم هست زیرا می‌توان تکرارها را در آن نادیده گرفت. **در ادامه‌ی درس X/R را یک مجموعه در نظر گرفته‌ایم.**

قضیه ۵.

$$\bigcup X/R = X$$

توجه ۶. یادآوری می‌کنیم که اگر A یک مجموعه باشد آنگاه

$$\bigcup A = \{x | \exists y \in A \quad x \in y\}$$

همچنین اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، آنگاه

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i \in I \quad x \in A_i\}$$

در قضیه‌ی بالا از نمادگذاری اولی استفاده کرده‌ایم.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که

$$X \subseteq \bigcup X/R.$$

فرض کنید که $x_\circ \in X$. از آنجا که رابطه‌ی R انعکاسی است داریم $x_\circ R x_\circ$؛ به بیان دیگر

$$x_\circ \in [x_\circ].$$

از آنجا که $[x_\circ] \in X/R$ و $x_\circ \in [x_\circ]$ بنا به توجه بالا نتیجه می‌شود که $x_\circ \in \bigcup X/R$.
حال ثابت می‌کنیم که

$$\bigcup X/R \subseteq X$$

اگر $x_\circ \in \bigcup X/R$ آنگاه $y \in X$ چنان موجود است که $x_\circ \in [y] = \{x \in X | xRy\} \subseteq X$ پس معلوم است که $x_\circ \in X$. □

توجه کنید که

- X/R مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X است.
- هیچ دو عضو از X/R با هم اشتراک ندارند.
- $\bigcup X/R = X$.

به بیان دیگر، X/R یک افراز برای مجموعه‌ی X است. پس از هر رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی یک مجموعه‌ی X به یک افراز برای آن دست می‌یابیم. در درسهای آینده (پس از تعریف دقیق افراز) خواهیم دید که در واقع از هر افراز برای یک مجموعه‌ی X به یک رابطه‌ی هم‌ارزیِ R روی این مجموعه می‌رسیم به طوری که X/R همان افراز را به دست بدهد. یعنی دو مفهومِ **افراز و رابطه‌ی هم‌ارزی با هم هم‌ارزند.**

افراز $\Leftrightarrow$ رابطه‌ی هم‌ارزی

به بیان دیگر، افرازهای یک مجموعه‌ی X در تناظر یک به یک با روابط هم‌ارزی روی آن هستند؛ یعنی، فرض کنید A مجموعه‌ی همه‌ی افرازهای مجموعه‌ی X باشد و B مجموعه‌ی همه‌ی روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی X باشد. تابعِ $f : B \to A$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(R) = X/R$$

تابع بالا، یک به یک و پوشاست. (فعلاً نگران سختی این گفته نباشید. مفاهیم تابع، یک‌به‌یک و پوشا را در درسهای آینده خواهیم دید.)

مثال ۷. روی مجموعه‌ی اعدادِ صحیح، $\mathbb{Z}$، رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_{۳} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = ۳k$$

نشان دهید که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و X/R را مشخص کنید.

پاسخ. نخست ثابت می‌کنیم که R انعکاسی است. برای هر $x \in \mathbb{Z}$ می‌دانیم که $x \equiv_۳ x$ پس روشن است که رابطه‌ی R انعکاسی است. حال ثابت می‌کنیم که R تقارنی است. اگر $y \equiv_۳ x$ آنگاه $y - x = ۳k$ برای یک عددِ $k \in \mathbb{Z}$ و از این رو $x - y = -۳k = ۳(-k)$ یعنی عددِ $k' \in \mathbb{Z}$ موجود است که $x - y = ۳k'$ پس $x \equiv_۳ y$. حال ثابت می‌کنیم که رابطه‌ی R متعدی است. فرض کنید xRy, yRz پس اعداد صحیحِ k, k' چنان موجودند که

$$y - x = ۳k \quad z - y = ۳k'$$

پس

$$z - x = ۳(k + k')$$

یعنی

$$xRz.$$

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. حال ادعا می‌کنیم که این رابطه، تنها دارای سه کلاس هم‌ارزی است؛ به بیان دیگر ادعا می‌کنیم که

$$X/R = \{[۰], [۱], [۲]\}$$

فرض کنید که x یک عدد صحیح دلخواه باشد. می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی x بر ۳ یکی از ۰و۱و۲ است. پس $x \in [۰] \cup [۱] \cup [۳]$. به بیان دیگر یا $[x] = [۰]$ یا $[x] = [۱]$ یا $[x] = [۲]$. پس

$$X/R \subseteq \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

همچنین واضح است که

$$\{[۰], [۱], [۲]\} \subseteq X/R$$

پس

$$X/R = \{[۰], [۱], [۲]\}.$$

توجه کنید که از آنجا که هیچ دو عدد از میان ۰و۱و۲ با هم به پیمانه‌ی ۳ همنهشت نیستند، اعضایِ

$$[۰], [۱], [۲]$$

هر سه با هم متمایزند؛ یعنی

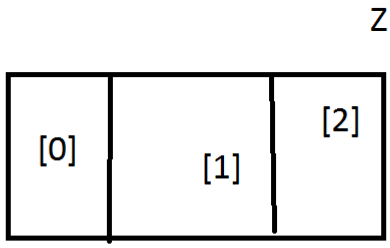
$$[۱] \cap [۲] = \emptyset, [۱] \cap [۰] = \emptyset, [۰] \cap ۲ = \emptyset$$

یعنی مجموعه‌ی

$$X/R$$

دقیقاً دارای سه عضو است. می‌نویسیم:

$$X/R = X/\equiv_۳ = \mathbb{Z}_۳ = \{[۰], [۱], [۲]\} = \{\overline{۰}, \overline{۱}, \overline{۲}\}$$



□

توجه کنید که در مثال بالا، با استفاده از رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی ۳، مجموعه‌ی اعداد صحیح را به ۳ قسمت افراز کردیم. همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ صفر است با [۰] نشان دادیم؛ همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ برابر با ۱ است با [۱] نشان دادیم؛ و همه‌ی اعدادی را که باقیمانده‌ی آنها بر ۳ برابر با ۲ است با [۲] نشان دادیم.

تعمیم ۸. برای عدد دلخواهِ $n \in \mathbb{N}$ روی $\mathbb{Z}$ رابطه‌ی R را به صورت زیر تعریف کنید:

$$xRy \Leftrightarrow x \equiv_n y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = nk$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی با n کلاس است و

$$\mathbb{Z}/R = \{[۰], \ldots, [n - ۱]\}.$$

مثال ۹. فرض کنید که $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ یک تابع دومتغیره با دامنه‌ی D باشد. روی D رابطه‌ی زیر را تعریف کنید:

$$(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow f(x, y) = f(x', y')$$

نشان دهید که رابطه‌ی بالا یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و کلاسهای هم‌ارزی آن دقیقاً همان منحنی‌های تراز تابعِ f هستند (یعنی رابطه‌ی بالا، دامنه‌ی تابع را با استفاده از منحنی‌های تراز افراز می‌کند.)