۱ جلسه‌ی سیزدهم، شنبه

در ابتدای جلسه برای مرور درس قبل یک تمرین حل می‌کنیم:

تمرین ۱. فرض کنید X' یک مجموعه باشد و D یک زیرمجموعه از X' باشد. روی $P(X')$ رابطه‌ی R را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R(X,Y) \iff Y = X \cup D$$

به بیان دیگر:

$$R = \{(X,Y) | X,Y \in P(X'), Y = X \cup D\}$$

سوال ۲. بُرد رابطه‌ی R را مشخص کنید.

$$Range(R) = \{Y \in P(X') | \exists X \in P(X') \quad (X,Y) \in R\} = \underbrace{\{Y \in P(X') | \exists X \in P(X') \quad Y = X \cup D\}}_{A}$$

قرار دهید:

$$B = \{Y \in P(X') | Y \supseteq D\}$$

ادعا می‌کنیم که

$$Range(R) = B$$

اثبات. کافی است نشان دهیم که

$$۱ \; Range(R) \subseteq B$$

و

$$۲ \; B \subseteq Range(R)$$

اثبات ۱. فرض کنید $Y_۰ \in Range(R)$ بنا به تعریف مجموعه‌ی $Range(R)$، یک مجموعه‌ی $X_۰ \in P(X')$ چنان موجود است که

$$Y_۰ = X_۰ \cup D$$

از آنجا که $Y_۰ = X_۰ \cup D$ داریم

$$D \subseteq Y_۰$$

بنابراین

$$Y_۰ \in \{Y \in P(X') | D \subseteq Y\} = B$$

پایان اثبات ۱

اثبات ۲. این ادعا را با استنتاج زیر ثابت می‌کنیم:

$$۱ \quad Y_۰ \in B \Rightarrow (Y_۰ \in P(X')) \wedge (Y_۰ \supseteq D)$$

$$۲ \quad Y_۰ \supseteq D \Rightarrow Y_۰ = D \cup (Y_۰ - D)$$

$$Y_\cdot = D \cup (Y_\cdot - D) \Rightarrow \exists X_\cdot \in P(X') \quad D \cup X_\cdot = Y_\cdot \qquad ③$$

بنا به ①,②,③ $$Y_\cdot \in B \Rightarrow \exists X_\cdot \in P(X') \quad Y_\cdot = D \cup X_\cdot \qquad ④$$

بنا به ④ $$Y_\cdot \in B \Rightarrow Y_\cdot \in Range(R) \qquad ⑤$$

□

۱.۱ ویژگی‌های روابط

فرض کنید R رابطه‌ای روی مجموعه‌ی X باشد.

تعریف ۳. رابطه‌ی R را **انعکاسی** [۱] می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad xRx$$

مثال ۴. رابطه‌ی تساوی را روی یک مجموعه‌ی دلخواهِ X در نظر بگیرید. داریم

$$\forall x \in X \quad x = x$$

پس این رابطه، انعکاسی است.

مثال ۵. همچنین هر مجموعه‌ای زیر مجموعه‌ی خودش است پس رابطه‌ی $\subseteq$ روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ نیز یک رابطه‌ی انعکاسی است.

مثال ۶ (دو مثالِ نقض)**.** رابطه‌ی $\in$ را روی مجموعه‌ی $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ در نظر بگیرید. داریم

$$\emptyset \notin \emptyset$$

پس این رابطه انعکاسی نیست. همچنین اگر روی مجموعه‌ی انسانها، رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy \iff \text{باشد } x \text{ پدرِ } y$$

این رابطه نیز غیر انعکاسی است.

تمرین ۷. فرض کنید X یک مجموعه باشد. تعریف کنید

$$\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}.$$

نشان دهید که رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X انعکاسی است اگر و تنها اگر

$$\Delta_X \subseteq R.$$

تعریف ۸. رابطه‌ی R **ضدِّانعکاسی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x \in X \quad x \not R x$$

[۱] reflective

توجه کنید که جمله‌ی زیر درست **نیست:**
هر رابطه‌ای که انعکاسی نباشد، ضد انعکاسی است.

تمرین ۹. یک رابطه مثال بزنید که نه انعکاسی باشد و نه ضد انعکاسی.

بیاید رابطه‌ای را که انعکاسی نباشد، غیرانعکاسی بخوانیم. پس:

۱. انعکاسی: $\forall x \quad xRx$

۲. غیر انعکاسی: $\exists x \quad x\not{R}x$

۳. ضد انعکاسی: $\forall x \quad x\not{R}x$

مثال ۱۰. رابطه‌های زیر ضدانعکاسی هستند:

$$xRy \Leftrightarrow \text{است } x \text{ پدر } y$$

روی مجموعه‌ی انسانها.

$$xRy \Leftrightarrow x \in y$$

روی یک مجموعه‌ی $P(X)$.

تعریف ۱۱. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **تقارنی** [2] می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \to yRx\Big)$$

مثال ۱۲. بررسی کنید که رابطه‌های تساوی ($x = y$) و تمایز ($x \neq y$) و مجزا بودن دو مجموعه روابطی تقارنی هستند.
رابطه‌ی مجزا بودن روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$XRY \iff X \cap Y = \emptyset$$

مثال ۱۳ (مثال نقض)**.** نشان دهید که رابطه‌های آمده در مثالِ ۶ تقارنی نیستند.

توجه ۱۴. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X غیرتقارنی است (یعنی تقارنی نیست) هرگاه

$$\exists x, y \in X \quad (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R.$$

تعریف ۱۵. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **پادتقارنی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \wedge yRx \to x = y\Big)$$

مثال ۱۶. بررسی کنید که رابطه‌ی $=$ روی یک مجموعه‌ی X و رابطه‌ی $\subseteq$ روی یک مجموعه به صورت $P(X)$ هر دو پادتقارنی هستند.

[2] symmetric

مثال ۱۷ (مثال نقض)**.** نشان دهید که روابط دوستی و همسن بودن روی یک مجموعه از انسانها پادتقارنی نیستند.

توجه ۱۸. چنین نیست که هر رابطه‌ای که تقارنی نباشد حتما پادتقارنی است. به عنوان تمرین، یک رابطه مثال بزنید که نه تقارنی باشد و نه پادتقارنی.

تعریف ۱۹. رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **متعدّی** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y, z \in X \quad \Big(xRy \wedge yRz \to xRz\Big)$$

مثال ۲۰. بررسی کنید که رابطه‌ی تساوی روی یک مجموعه‌ی X، همسن بودن در مجموعه‌ی انسانها، و زیر مجموعه بودن روی یک مجموعه‌ی $P(X)$ هر سه متعدی هستند.

مثال ۲۱ (مثال نقض)**.** بررسی کنید که رابطه‌ی دوستی روی مجموعه‌ی انسانها و رابطه‌ی

$$xRy \Leftrightarrow \text{است } x \text{ پدر } y$$

روابطی نامتعدی هستند.

تعریف ۲۲ (تام بودن)**.** رابطه‌ی R روی یک مجموعه‌ی X را **تام** می‌خوانیم هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad \Big(xRy \vee yRx\Big)$$

مثال ۲۳ (مثال نقض)**.** رابطه‌ی پدری.

۲ چند تمرین

تمرین ۲۴. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X متعدی است اگر و تنها اگر $R \circ R \subseteq R$

اثبات. نخست یادآوری می‌کنیم که

$$(x, y) \in R \circ R \iff \exists z \quad R(x, z) \wedge R(z, y)$$

نخست نشان می‌دهیم که اگر رابطه‌ی R متعدی باشد آنگاه

$$R \circ R \subseteq R$$

فرض کنیم R متعدی است و $(x, y) \in R \circ R$. از این که $(x, y) \in R \circ R$ نتیجه می‌شود که

$$\exists z. \quad (x, z.) \in R \wedge (z., y) \in R \quad (*)$$

بنا به $(*)$ و متعدی بودن R نتیجه می‌شود که

$$(x, y) \in R$$

حال ثابت می‌کنیم که اگر $R \circ R \subseteq R$ آنگاه R متعدی است.

فرض: $R \circ R \subseteq R$

حکم:

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

فرض کنید $(x, y) \in R$ و $(y, z) \in R$ و $R \circ R \subseteq R$. از اینکه $(x, y) \in R$ و $(y, z) \in R$ نتیجه می‌شود که

$$(x, z) \in R \circ R$$

از فرض $R \circ R \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x, z) \in R.$$

□

تمرین ۲۵. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X انعکاسی است اگر و تنها اگر $\Delta_X \subseteq R$.

اثبات. نخست فرض می‌کنیم که R انعکاسی است و ثابت می‌کنیم که

$$\Delta_X \subseteq R$$

فرض کنید $(x, x) \in \Delta_X$. بنا به این که R انعکاسی است نتیجه می‌گیریم که $(x, x) \in R$. پس

$$\Delta_X \subseteq R.$$

حال فرض کنید $\Delta_X \subseteq R$. می‌خواهیم ثابت کنیم که R انعکاسی است. عنصر دلخواه $x_0 \in X$ را در نظر بگیرید. بنا به تعریف رابطه‌ی قطری [3] داریم:

$$(x_0, x_0) \in \Delta_X$$

حال از فرض $\Delta_X \subseteq R$ نتیجه می‌گیریم که

$$(x_0, x_0) \in R$$

از آنجا که x_0 به طور دلخواه انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که R انعکاسی است. □

تمرین ۲۶. نشان دهید که تنها رابطه‌ای که هم انعکاسی باشد و هم تقارنی و هم پادتقارنی، رابطه‌ی تساوی است. (پاسخ به عهده‌ی شما).

تمرین ۲۷. نشان دهید که رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی X تام است اگر و تنها اگر

$$R \cup R^{-1} = X \times X$$

[3] رابطه‌ی Δ_X را رابطه‌ی قطری روی X می‌خوانیم.

اثبات. فرض کنیم R تام باشد. اگر $(x_0,y_0)\in X\times X$ آنگاه از آنجا که R تام است یا $(x_0,y_0)\in R$ یا $(y_0,x_0)\in R$. پس یا $(x_0,y_0)\in R$ یا $(x_0,y_0)\in R^{-1}$. از آنجا که (x_0,y_0) به طور دلخواه انتخاب شده است، داریم:

$$X\times X\subseteq R\cup R^{-1}.$$

اثباتِ این که

$$R\cup R^{-1}\subseteq X\times X:$$

می‌دانیم R یک رابطه روی X است پس

$$R\subseteq X\times X$$

می دانیم R^{-1} یک رابطه روی X است پس

$$R^{-1}\subseteq X\times X$$

پس

$$R\cup R^{-1}\subseteq X\times X$$

تا اینجا ثابت کرده‌ایم که اگر R تام باشد آنگاه

$$X\times X=R\cup R^{-1}.$$

حال فرض کنید

$$X\times X=R\cup R^{-1}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که R تام است. عناصر دلخواه $x_0,y_0\in X$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم

$$(x_0,y_0)\in X\times X$$

پس

$$(x_0,y_0)\in R\cup R^{-1}$$

پس یا $(x_0,y_0)\in R$ که در اینصورت x_0Ry_0. یا $(x_0,y_0)\in R^{-1}$ که در این صورت y_0Rx_0. پس رابطه‌ی R تام است. □

تمرین ۲۸. روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی، رابطه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$xRy\Leftrightarrow x\leq y.$$

رابطه‌ی بالا (رابطه‌ی ترتیب) کدام یک از ویژگی‌های معرفی شده در این درس را دارد؟