۱ جلسه‌ی دوازدهم، دوشنبه

۱.۱ مرور

تمرین ۱. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$، خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و $\{J_k\}_{k\in L}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های I به طوری که $\bigcup_{k\in L} J_k = I$. ثابت کنید که

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$$

پاسخ. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$① \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j$$

$$② \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

در این جا اولی را ثابت می‌کنیم و دومی را به عنوان تمرین به عهده‌ی شما می‌نهیم.

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists i_۰ \in I \quad x \in A_{i_۰} \tag{۱}$$

$$(i_۰ \in I) \wedge (I = \bigcup_{k\in L} J_k) \Rightarrow \exists k_۰ \in K \quad i_۰ \in J_{k_۰} \tag{۲}$$

$$(x \in A_{i_۰}) \wedge (i_۰ \in J_{k_۰}) \Rightarrow x \in \bigcup_{j\in J_{k_۰}} A_j \tag{۳}$$

$$(k_۰ \in L) \wedge x \in \bigcup_{j\in J_{k_۰}} A_j \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \tag{۴}$$

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in L}\bigcup_{j\in J_k} A_j \quad \text{بنا به ۱و۲و۳و۴} \tag{۵}$$

□

تمرین ۲. آیا $P(A\times B) = P(A)\times P(B)$؟

۲.۱ روابط

مفهوم رابطه در زبان روزمره آنقدر پرکاربرد است که شاید هنگام استفاده آن به تعریف دقیق آن توجه نکرده باشیم: رابطه‌ی پدر و فرزندی، پسرخاله و دخترخاله بودن، همسن‌وسال‌بودن و امثالهم. برای

مصارف ریاضی، باید رابطه را دقیق تعریف کنیم:

منظور از یک رابطه از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، یک زیرمجموعه از $P(A \times B)$ است. نیز منظور از یک رابطه روی مجموعه‌ی X یک رابطه از X به X است.

توجه ۳. اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد لزوماً دامنه‌ی R تمام X نیست. برای مثال روی مجموعه‌ی اعضای یک خانواده‌ی مشخص، دامنه‌ی رابطه‌ی x پدرِ y است، تنها یک عضو دارد.

۱.۲.۱ رابطه‌ی تساوی

فرض کنید X یک مجموعه باشد. رابطه‌ی زیر را رابطه‌ی تساوی روی X می‌خوانیم:

$$R = \{(x, y) | x \in X, y \in X, x = y\}$$

رابطه‌ی تساوی (که آن را رابطه‌ی قطری نیز می‌خوانیم) را می‌توان به صورت زیر هم نمایش داد:

$$xRy \iff x = y$$

این رابطه را با Δ نیز گاهی نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات مجموعه مورد نظر را نیز به صورت اندیس می‌نویسیم تا مشخص شود که تساوی روی چه مجموعه‌ای منظور ماست. پس به طور خلاصه:

$$\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$$

۲.۲.۱ رابطه‌ی تعلق

رابطه‌ی تعلق را با $\in$ نشان می‌دهیم.

$$xRy \iff x \in y$$

فرض کنید X یک مجموعه باشد و $P(x)$ مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های آن. رابطه‌ی تعلق رابطه‌ای از X به $P(X)$ است که به صورت بالا تعریف می‌شود. به بیان دیگر:

$$R = \{(x, y) | x \in X, y \in P(X), x \in Y\}.$$

توجه کنید که دامنه‌ی این رابطه، X است و بُرد آن برابر است با $P(X) - \{\emptyset\}$. (این گفته را تحقیق کنید).

۳.۲.۱ رابطه‌ی مشمولیت

فرض کنید X یک مجموعه باشد. روی $P(X)$ رابطه‌ی مشمولیت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$ARB \iff A \subseteq B$$

به بیان دیگر

$$R = \{(x, y) | x \in P(X), y \in P(X), x \subseteq y\}$$

۴.۲.۱ معکوس یک رابطه

اگر R یک رابطه از A به B باشد، رابطه‌ی R^{-1} را از B به A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, y) \in R^{-1} \iff (x, y) \in R$$

۵.۲.۱ ترکیب روابط

فرض کنید R یک رابطه از A به B و S یک رابطه از B به C باشند. آنگاه رابطه‌ی $R \circ S$ را از A به C به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x, y) \in R \circ S \iff \exists z \in B\Big((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\Big)$$

مثال ۴. فرض کنید روی یک مجموعه از انسانها روابط R و S به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$(x, y) \in R \iff x \text{ فرزند } y \text{ باشد}$$

$$(x, y) \in S \iff y \text{ برادر } x \text{ باشد}$$

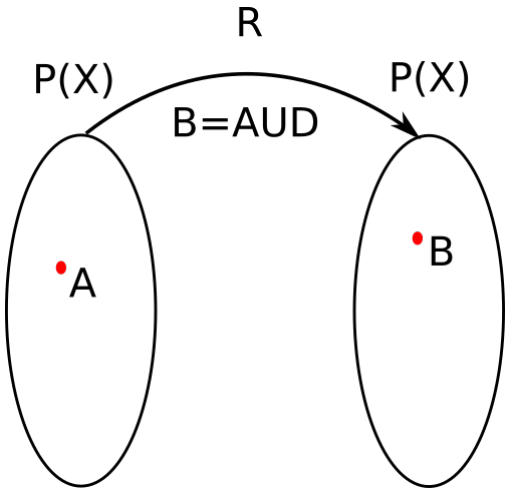
آنگاه داریم:

$$(x, y) \in R \circ S \iff \exists z \quad (x \text{ فرزند } z \text{ باشد}) \wedge (z \text{ برادر } y \text{ باشد})$$

$$\iff x \text{ برادرزاده‌ی } y \text{ باشد.}$$

تمرین ۵. اگر X یک مجموعه باشد و $D \subseteq X$ یک مجموعه‌ی ثابت. دامنه و برد رابطه‌ی زیر را تعیین کنید.

$$R = \{(A, B) | A, B \in P(X), A \cup D = B\}$$


R
P(X)
P(X)
B=AUD
A
B