تعریف

تئوری T سورها را حذف می‌کند هرگاه

در مدل M

برای هر فرمول $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ یک فرمول بدون سور $\psi(x_1,\dots,x_n)$ پیدا شود به طوری که

$$T \models \forall x_1,\dots,x_n \left(\varphi(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \psi(x_1,\dots,x_n)\right)$$

اگر $M \models T$ ، $a_1,\dots,a_n \in M$

آنگاه

$$M \models T \Rightarrow M \models \forall x_1,\dots,x_n\, \varphi(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \psi(x_1,\dots,x_n)$$

نتیجه

$$M \models \varphi(a_1,\dots,a_n) \leftrightarrow \psi(a_1,\dots,a_n)$$

توجه: اگر تئوری T سورها را حذف کند آنگاه T مدل کامل است. (model-complete)

یعنی اگر $M, N \models T$ ، $M \subseteq N$ زیرساختار

و $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ یک فرمول دلخواه باشد

و $a_1,\dots,a_n \in M$ آنگاه

$$M \models \varphi(a_1,\dots,a_n) \Leftrightarrow N \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$$

به بیان دیگر اگر T سورها را حذف کند

آنگاه اگر $M, N \models T$ ، $\underset{\text{زیرساختار}}{M \subseteq N}$

آنگاه $M \preceq N$

زیرساخت مقدماتی

اثبات فرض کنید $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ یک فرمول دلخواه باشد.

فرمول بدون سور $\psi(x_1,\dots,x_n)$ موجود است به طوری که

$$T \models \forall x_1,\dots,x_n \ \varphi(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow \psi(x_1,\dots,x_n)$$

بنابراین فرض کنید $a_1,\dots,a_n \in M$ آنگاه

$$N \models \varphi(a_1,\dots,a_n) \leftrightarrow \underbrace{\psi(a_1,\dots,a_n)}_{\text{بدون سور}}$$

$$\Rightarrow M \models \psi(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow M \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$$

جبر

فرض کنید R یک حلقه باشد و I یک ایده‌آل از R.

حلقه $\frac{R}{I}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{R}{I} = \{ r+I \mid r\in R \}$$

$$r+I = r'+I \Leftrightarrow r-r'\in I$$

$$(r+I)+(r'+I) = (r+r')+I$$

$$(r+I)\cdot(r'+I) = rr'+I$$

اگر I یک ایده‌آل اول باشد $\frac{R}{I}$ یک حوزه صحیح است.

$$(a+I)(b+I)=0 \Leftrightarrow ab+I=0$$

$$\Leftrightarrow ab\in I \underset{\text{اول } I}{\Longleftrightarrow} (a\in I)\vee(b\in I)$$

$$\Leftrightarrow (a+I=0)\vee(b+I=0)$$

توجه

R/I

$$(a+I)\cdot(b+I) = ab+I$$

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$$

فرض کنید $f(x) \in R[X]$ یک چندجمله‌ای باشد

آنگاه

$$f(a+I) = f(a)+I$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m,n \in \mathbb{Z} \right\}$$

F
$=$

اگر D یک حوزه‌ی صحیح باشد میدان کسرهای

از عناصر

$$F = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m,n \in D \right\}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \iff mn' - nm' = 0$$

F کوچکترین میدان شامل D است.

ادامه درس

هندسه جبری

$k[x_1, \dots, x_n]$

k^n

$X = V(I) \longrightarrow I = \{ f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \forall a \in X \; f(a) = 0 \}$

بسته زاریسکی

ایده‌آل رادیکال

یادآوری

فرض کنید I, J دو ایده‌آل در $k[x_1, \dots, x_n]$ باشند.

به طور کلی $I \subseteq J$ آنگاه $V(I) \supseteq V(J)$

اگر $I \subsetneq J$ رادیکال آنگاه $V(I) \supsetneq V(J)$

اثبات

از آنجا که $k[x_1, \dots, x_n]$ یک حلقه نوتری است

$I = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ از طرفی بنابر قضیه تجزیه اولیه $I = \underbrace{P_1 \cap \dots \cap P_k}_{\text{ایده‌آل اول}}$

یعنی $a_1, \ldots, a_n \in V(I) - V(J)$.

از آنجایی که $g \in J - I$ فرض کنید که

$g \in J - p_1$ دامنه صحیح $\dfrac{k[x_1, \ldots, x_n]}{p_1}$

را در نظر بگیرید

$p_1 \cap \cdots \cap p_k$

$\overset{\shortparallel}{I} \subsetneq J$

$\overset{\shortparallel}{\langle h_1, \ldots, h_m \rangle}$

فرض کنید $g \in J - I$

از ۱ عناصر $a_1, \ldots, a_n$ موجودند به طوری که

$h_1(a_1, \ldots, a_n) = \cdots = h_m(a_1, \ldots, a_n) = 0$

$\wedge\, g(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$

ادامه درس

K

g

$$\frac{k[x_1,\dots,x_n]}{P} \models g(x_1+P_1,\dots,x_n+P_1) \neq 0$$

$g(x_1,\dots,x_n) \notin P_1$

عکس

$$\frac{k[x_1,\dots,x_n]}{P_1} \models$$

$$h_1(x_1+P_1, x_2+P_1, \dots, x_n+P_1) = 0 = \dots = h_m(x_1+P_1,\dots,x_n+P_1)$$

$$h_1(x_1,\dots,x_n)+P_1 = 0 \overset{\text{یعنی}}{\iff} h_1(x_1,\dots,x_n) \in P_1$$

$h_1 \in I \subseteq P_1$

$f \in k[x]$

$$\frac{k[x]}{\underbrace{\langle f(x) \rangle}_{I}}$$

$F_1 \models \exists u_1 \ldots u_n \; g(u_1, \ldots u_n) \neq 0 \wedge$
$h_1(u_1, \ldots u_n) = \cdots = h_m(u_1, \ldots u_n) = 0$

$\Rightarrow K \models \exists u_1 \ldots u_n \; g(u_1, \ldots u_n) \neq 0 \wedge$
$h_1(u_1, \ldots u_n) = \cdots = h_m(u_1, \ldots u_n) = 0$

$\frac{K[X_1 \ldots X_n]}{P_1} \models \exists u_1 \ldots u_n$
$g(u_1, \ldots u_n) \neq 0 \wedge$
$h_1(u_1, \ldots u_n) = \cdots = h_m(u_1, \ldots u_n) = 0$

$K \subseteq \frac{K[X_1 \ldots X_n]}{P} \subseteq$ میدان کسرها $\subseteq F_1$

بستار جبری میدان کسرها

$K, F_1 \models ACF_0$
$K \subseteq F_1$

ادامه درس

نتیجه

اگر I , J دو ایده‌آل رادیکال باشند

و $I \neq J$ آنگاه $V(I) \neq V(J)$.

اثبات

فرض کنید $I \neq J$ آنگاه $I \cap J \neq I$.

$I \cap J \subsetneq I$

$$V(I\cap J) = V(I) \cup V(J) \neq V(I) \Rightarrow V(I) \neq V(J)$$

نتیجه

I , J رادیکال هستند

$$V(I) = V(J) \Longleftrightarrow I = J$$

I رادیکال

$$I(V(I)) = I$$

اثبات

فرض کنید که $I(V(I)) = J \neq I$

$$V(J) = V(I(V(I))) \neq V(I)$$

$$V(I(V(I))) = V(I)$$

یادآوری

اگر X بسته زاریسکی باشد

$$V(I(X)) = X$$

بنابراین

$$V(I(V(I))) = V(I)$$

1. فرافیلتر F غیر اصلی است $\Longleftrightarrow$ شامل همه مجموعه‌های هم‌متناهی باشد
2. اثبات فشردگی + واش
3. T دارای اصل‌بندی جهانی است $\Longleftrightarrow$ نسبت به زیرساختار بسته باشد.
4. T دارای اصل‌بندی $\forall\exists$ است $\Longleftrightarrow$ تحت اجتماع زنجیرها بسته باشد.
5. کلاس K مقدماتی است $\Longleftrightarrow$ تحت معادل بودن مقدماتی و فراضرب بسته باشد.
6. K متناهی اصل‌بندی‌پذیر $\Longleftrightarrow$ K, K^c مقدماتی
7. تئوری گروه‌های بی‌تاب، مجموعه‌های متناهی، گروه‌های تاب‌دار، قابل اصل‌بندی نیست.
8. فراتوان $M \preccurlyeq \prod M_i$
9. تمرین ۱ کلاس تمرین (24)،
10. T مدل‌های متناهی بزرگ $\leftarrow$ مدل‌های نامتناهی
11. کامل بودن ACF_0، [illegible] در DLO
12. نظر شما درباره کلاس
13. $M \equiv \prod M_i / \mathcal{U} \Longleftrightarrow M \models \bigcap Th(M_i)$ (حذف شد)
14. سامانه‌ی [illegible] بازگشتی و کامل بودن

---

15. فراضرب میدان‌های متناهی