به نام خدا

O-minimality

یادآوری

- اگر R یک حلقه نوتری باشد آن گاه $R[x]$ نوتری است.

$R[x_1,\dots,x_n]$ نوتری است $\overset{\text{استقرا}}{\Longleftarrow}$ نوتری است.

- نتیجه: اگر K یک میدان باشد آن گاه $K[x_1,\dots,x_n]$ یک حلقه نوتری است.

$S \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$

بسته زاریسکی

$X = V(S)$

$X = V(I(X))$

$I(X) = \{ f \in k[x_1,\dots,x_n] \mid \forall \bar{a} \in X \; f(\bar{a}) = 0 \}$.

برای هر مجموعه X، $I(X)$ یک ایده‌آل رادیکال است.

K^n $\qquad$ $K[x_1, \ldots, x_n]$

$X = V(I) \longrightarrow I$

بسته زاریسکی

رادیکال

نتیجه

$X_i \subseteq K^n$

هیچ زنجیر نزولی $X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \cdots$ از مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی

وجود ندارد. زیرا در غیر این صورت یک زنجیر اکیداً $I(X_1) \subseteq I(X_2) \subseteq \cdots$

تولید می‌شود که نوتری بودن $K[x_1, \ldots, x_n]$ را نقض می‌کند.

لم اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی

بسته‌ی زاریسکی است.

اثبات فرض کنید $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ بسته‌ی زاریسکی باشند.

$X_1 \cap X_2 \cap \cdots$

زنجیر زیر را در نظر بگیرید.

$X_1 \supseteq X_1 \cap X_2 \supseteq X_1 \cap X_2 \cap X_3 \supseteq \cdots$

بسته زاریسکی ؛ برای اشتراک متناهی

پس هر اشتراک نامتناهی از مجموعه‌های بسته زاریسکی

ازای برابر می‌شود. $X \cap Y = V(I_1 + I_2)$

$X = V(I_1)$

$Y = V(I_2)$

---

① $\emptyset , K^n$ بسته زاریسکی

② $X_1 \cup \dots \cup X_n$ اجتماع متناهی، بسته زاریسکی

③ $\bigcap_{i \in I} X_i$ بسته زاریسکی

X_i ها مجموعه بسته

که توپولوژی روی K^n هستند.

توجه

فرض کنید $X = V(I(X))$ بسته زاریسکی باشد.

از آنجا که $I(X)$ یک ایده‌آل در $K[x_1, \dots, x_n]$ است آن ایده‌آل متناهی

تولید شده: $I(X) = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$

بنابراین $X = V(f_1, \dots, f_n)$

$L = \{+, \cdot, 0, 1\}$

نتیجه

فرض کنید K یک میدان بسته جبری باشد.

فرض کنید $X \subseteq K^n$ توسط یک فرمول بدون سور تعریف‌پذیر باشد. (احتمالاً با پارامتر)

آنگاه X ترکیب بولی متناهی از مجموعه‌های بسته زاریسکی است.

تعریف

مجموعه‌ی $X \subseteq K^n$ را ساخت‌پذیر (Constructible) می‌نامیم هرگاه ترکیب بولی از مجموعه‌های بسته زاریسکی باشد.

فرض کنید $X \subseteq K^n$ (جبری / مثلاً هموار)

یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر با پارامتر باشد.

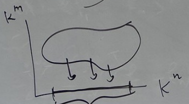
آنگاه X با یک فرمول بدون سور تعریف می‌شود. پس X ساخت‌پذیر است.

$$\{\underbrace{\bar{x} \mid \varphi(\bar{x}, \bar{a})}_{\text{فرمول دلخواه}}\} = \underbrace{\{\bar{x} \mid \underbrace{\psi(\bar{x}, \bar{a})}_{\text{بدون سور}}\}}_{\text{ساخت‌پذیر}}$$

نتیجه

اگر $X \subseteq K^n \times K^m$ یک مجموعه‌ی ساخت‌پذیر باشد

آنگاه تصویر X روی K^n ساخت‌پذیر است.



Projection

(مجموعه‌های ساخت‌پذیر تحت تصویرگیری بسته هستند)

اثبات

اگر $X \subseteq K^n \times K^m$ ساخته‌شدنی باشد

آنگاه X توسط یک فرمول $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ در K^n تعریف شده است:

$$X = \{(\underset{K^n}{\bar{x}},\underset{K^m}{\bar{y}}) \mid K \models \varphi(\bar{x},\bar{y})\}$$

تصویر X روی K^n توسط فرمول زیر تعریف می‌گردد.

$$\pi_{K^n}(X) = \{\underbrace{\bar{x} \mid \exists \bar{y} \ \varphi(\bar{x},\bar{y})}\}$$

پس $\pi_{K^n}(X)$ یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر است. پس به دلیل ح‌س تعریف‌پذیر بی‌سور

پس ساخته‌شدنی است.

جبر

تعریف ایده‌آل I را گوی ناشکری نامیم
هرگاه ایده‌آل‌های $I_1, I_2 \neq I$ پیدا نشوند به طوری که

$$I = I_1 \cap I_2$$

(Chevalli...)

قضیه (شوالی)

اگر $K^n \supseteq X$ ساخت‌پذیر باشد و

$$f : K^n \to K^m$$
$$(x_1, \dots, x_n) \to (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

یک نگاشت چندجمله‌ای باشد آنگاه $f(X)$ ساخت‌پذیر است.

$$Y = f(X) \Rightarrow Y = \underbrace{\{\bar{y} \mid \exists \bar{x} \in X \ \ \bar{y} = f(\bar{x})\}}$$

لم

اگر R یک حلقه نوتری باشد و

I یک ایده‌آل از R باشد آن گاه

$$I = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$$

به طوری که I_i ها تحویل ناپذیر هستند.

I ایده‌آل دلخواه

اگر I تحویل ناپذیر باشد ✓

اثبات

فرض کنید I تحویل ناپذیر نباشد آن گاه

$$I = I_1 \cap I_2$$

$$I_3 \cap I_4$$

$$I_5 \cap I_6$$

$$I \subseteq I_1$$

$$I \subseteq I_2$$

فرض کنید $I_1 = I_3 \cap I_4$ آن گاه

$$I = I_3 \cap I_4 \cap I_2$$

$$I \subseteq I_1 \subseteq I_3$$

اگر روند فوق ادامه یابد به یک زنجیر صعودی از ایده‌آل‌ها می‌رسیم.

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/\langle n\mathbb{Z}\rangle$$

تعریف و قضایا

الف) ایده‌آل $I \subseteq R$ اول است $\Longleftrightarrow$

$$\forall a,b\in R \quad (a.b\in I \to a\in I \vee b\in I)$$

R/I حوزه صحیح باشد. $\Longleftrightarrow$

$$(ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0)$$

$$x \overset{I}{\equiv} y \Leftrightarrow x-y\in I$$

$$R/I = \{ [x]_{\equiv} \mid x\in R \}$$

ب) ایده‌آل I اولیه است هرگاه

$$\forall a,b\in R \quad a.b\in I \wedge a\notin I$$

$$\Longrightarrow \exists n\in \mathbb{N} \quad b^n\in I$$

$$\left(ab\in I \wedge a\notin I \Rightarrow b\in\sqrt{I}\right)$$

۴) اگر R نوتری باشد

هر ایده‌آل تحویل‌ناپذیر، اولیه است.

اثبات: ابتدا حکم زیر را ثابت می‌کنیم:

اگر ایده‌آل (0) تحویل‌ناپذیر باشد آنگاه (0) اولیه است.

(حکم A)

اثبات حکم A.

فرض کنید $ab=0$ ، $a\neq 0$.

هدف: اثبات این که $\exists n\ b^n=0$.

قرار دهید

$$Ann(b)=\{x \mid xb=0\}$$

Annihilator

$\forall n \left(x b^{n+1} = 0 \leftrightarrow x b^{n} = 0 \right)$

<u>ادعا</u> در این صورت $(0) = (a) \cap (b^n)$

$x \in (a) \cap (b^n)$

$\Downarrow$

$x = 0$

$x = ya = tb^n$

$xb = yab = tb^{n+1} = 0$

$\rightarrow tb^n = 0 \rightarrow x = 0$

توجه کنید که $\operatorname{Ann}(b) \subseteq \operatorname{Ann}(b^2) \subseteq \operatorname{Ann}(b^3) \subseteq \cdots$

زیرا $\operatorname{Ann}(t)$ یک ایده‌آل است (بررسی کنید).

از آنجایی که R نوتری است زنجیر بالا متوقف می‌شود.

$\exists n \ \operatorname{Ann}(b^{n+1}) = \operatorname{Ann}(b^n)$

۲) اگر R نوتری باشد

هر ایده‌آل تحویل‌ناپذیر، اولیه است.

فرض کنید I یک ایده‌آل تحویل‌ناپذیر دلخواه باشد.

حلقه‌ی R/I را در نظر بگیرید. در حلقه‌ی R/I ایده‌آل صفر

اگر تحویل‌ناپذیر باشد اولیه است.

اگر I اولیه باشد آنگاه ۰ اولیه است (در R/I).

تمرین: R/I نوتری است.

نتیجه: اگر R نوتری باشد آنگاه هر ایده‌آل I

(۱) یک تجزیه‌ی اولیه دارد.

$$I = \underbrace{I_1 \cap \dots \cap I_n}_{\text{اولیه}}$$

قضیه

فرض کنید I یک ایده‌آل رادیکال در حلقه نوتری R باشد.

آنگاه I دارای یک تجزیه اولیه یکتا به صورت $I = P_1 \cap \dots \cap P_n$ است. (یکتا: اگر $I = q_1 \cap \dots \cap q_m$ آنگاه $n=m$ ، $\{q_1, \dots, q_n\} = \{P_1, \dots, P_n\}$ ...)

اثبات

اولاً I دارای یک تجزیه اولیه زیر است:

$$I = I_1 \cap \dots \cap I_n$$

که اولیه

ثانیاً اگر J یک ایده‌آل اولیه باشد آنگاه $\sqrt{J}$ اول است.

$$ab \in \sqrt{J} \Rightarrow a^n b^n \in J \Rightarrow b^{nm} \in J \Rightarrow b \in \sqrt{J}$$

$a \notin \sqrt{J}$ ، $a^n \notin J$

ثانیاً

$$I=\sqrt{I}=\underbrace{\sqrt{I_1}}_{\text{اول}}\cap\dots\cap\underbrace{\sqrt{I_n}}_{\text{اول}}$$

اثبات یکتایی

فرض کنید

$$I=p_1\cap\dots\cap p_n=q_1\cap\dots\cap q_m$$

توجه: کافی است ثابت کنیم هر p_i شامل حداقل یکی از q_j هاست

فرض کنید p_1 شامل هیچکدام از q_i ها نباشد.

$x_1\in q_1-p_1$

$x_2\in q_2-p_1$

$\vdots$

$x_m\in q_m-p_1$

$$x_1x_2\cdots x_m\in\bigcap q_i$$

بنابراین $x_1\cdots x_m\in p_1$. پس حداقل یکی از x_i ها در p_1 هستند