حلقه

$K[x_1, \dots, x_n]$

میدان K ، K^n

$K \times K \times \dots \times K$

یادآوری تعریف

مجموعه‌ی $X \subseteq K^n$ را بسته‌ی زاریسکی

Zariski closed

می‌نامیم هرگاه یک مجموعه‌ی $S \subseteq K[\bar{x}]$ موجود باشد به طوری که

$$X = V(S) := \{\bar{a} \mid \forall f \in S \quad f(\bar{a}) = 0\}$$

تعریف

اگر $X \subseteq K^n$ دلخواه باشد آنگاه تعریف می‌کنیم

$$I(X) = \{f \in K[\bar{x}] \mid \forall \bar{a} \in X \ f(\bar{a}) = 0\}$$

ثابت کنید برای هر مجموعه‌ی X، $I(X)$ یک ایده‌آل رادیکال در $K[\bar{x}]$ است. (یعنی اگر $f^n(x) \in I(X)$ آنگاه $f(x) \in I$).

سوال

$$V(I(X)) \overset{?}{=} X$$
$$\supseteq$$

$$I(V(I)) \overset{?}{=} I$$

لم: اگر X بسته زاریسکی باشد آنگاه $V(I(X)) = X$.

اثبات: اگر X بسته زاریسکی باشد آنگاه $X = V(S)$، $S \subseteq k[X]$.

$\supseteq$ همواره برقرار است.

فرض کنید $u \notin X$ یعنی $u \notin V(S)$.

آنگاه حتماً $f \in S$ وجود دارد به طوری که $f(u) \neq 0$

یعنی حتماً $f \in I(X)$ وجود دارد به طوری که $f(u) \neq 0$ پس $u \notin V(I(X))$.

لم) اگر X, Y بسته زاریسکی باشند

آنگاه $X \cup Y$ بسته زاریسکی است.

اثبات: $X = V(I(X))$

$Y = V(I(Y))$

داریم $X \cup Y = V(I(X) \cap I(Y))$

$\subseteq$

داریم $I(X) \cap I(Y) \subseteq I(X)$

بنابراین

$$V(I(X) \cap I(Y)) \supseteq \underset{\underset{\textstyle X}{\shortparallel}}{V(I(X))}$$

$$V(I(X) \cap I(Y)) \supseteq \underset{\underset{\textstyle Y}{\shortparallel}}{V(I(Y))}.$$

از طرفی فرض کنید $u \notin X \cup Y = V(I(X)) \cup V(I(Y))$.

پس $f \in I(X)$ و $g \in I(Y)$ موجود هستند بطوریکه

$f(u) \neq 0$.
$g(u) \neq 0$

از طرفی $\underbrace{f \cdot g \in I(X) \cap I(Y)}$.

یعنی $u \notin V(I(X) \cap I(Y))$.

لم: اگر X، Y بسته زاریسکی باشند آنگاه $X \cap Y$ نیز بسته زاریسکی است.

اثبات: فرض کنید

$$X = V(I(X))$$

$$Y = V(I(Y))$$

$$\supseteq \quad \text{(۱)}$$

$$\underbrace{V(I(X)) \cap V(I(Y))} = X \cap Y = V(I(X)+I(Y))$$

$$I(X)+I(Y) = \{ f+g \mid f \in I(X), g \in I(Y) \}$$

$$I(X) \subseteq I(X)+I(Y)$$

$$X = V(I(X)) \supseteq V(I(X)+I(Y))$$

حال فرض کنید $u \notin V(I(X)+I(Y))$ آنگاه

$f \in I(X)$، $g \in I(Y)$ وجود دارند به طوری که $f+g(u) \neq 0$.

اگر $u \in V(I(X)) \cap V(I(Y))$ آنگاه $f(u)=0$، $g(u)=0$ پس $f+g(u)=0$

تعریف

حلقه‌ی R را نوتری می‌نامیم هرگاه هیچ زنجیر نامتناهی

Noetherian

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ از ایده‌آل‌ها موجود نباشد.

نتیجه: اگر k میدان باشد آنگاه k نوتری است.

$$I = \langle f_1, f_2, \ldots \rangle$$

$$\langle f_1 \rangle \subseteq \langle f_1, f_2 \rangle \subseteq \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \ldots$$

تمرین

R نوتری است $\Longleftrightarrow$ هر ایده‌آل در R متناهیاً تولید شده باشد.

$$I = \langle f_1, f_2 \rangle = \{ r_1 f_1 + r_2 f_2 \mid r_i \in R \}$$

قضیه

اگر R یک حلقه نوتری باشد آنگاه $R[X]$ نیز نوتری است.

(پس $R[X_1, \ldots, X_n]$ نوتری است)

نتیجه

اگر R میدان باشد هر ایده‌آل در $R[X]$ تنها توسط یک عضو تولید می‌شود.

اثبات

فرض کنید ایده‌آل I در $R[X]$ متناهیاً تولید شده نباشد.

فرض کنید $f_0 \in I$ دارای حداقل درجه باشد. $\deg f_0 = n_0$

$$f_0 = a_0 x^{n_0} + \cdots$$

از آنجایی که I متناهیاً تولید شده نیست $I \neq \langle f_0 \rangle$ فرض کنید

$f_1 \in I - \langle f_0 \rangle$ دارای حداقل درجه باشد.

$$\deg f_1 = n_1$$

$$f_1 = a_1 x^{n_1} + \cdots$$

به همین ترتیب $I \neq \langle f_0, f_1 \rangle$ پس فرض کنید

$$f_2 \in I - \langle f_0, f_1 \rangle$$

دارای حداقل درجه باشد.

$$\deg f_i = n_i$$

$$f_i = a_i x^{n_i} + \cdots$$

از طرفی در حلقه R زنجیر زیر را داریم

$$\langle a_0 \rangle \subseteq \langle a_0, a_1 \rangle \subseteq \langle a_0, a_1, a_2 \rangle \cdots$$

از آنجایی که R نوتری است که زنجیر بالا ایستا است

فرض کنید زنجیر بالایی از k مرحله بایستد.

f_{k+1}

$$a_{k+1} = r_0 a_0 + \cdots + r_k a_k$$

چنین اعدادی

$$r_0 f_0 x^{n_{k+1}-n_0} + r_1 f_1 x^{n_{k+1}-n_1} + \cdots + r_k f_k x^{n_{k+1}-n_k} - f_{k+1} = h(x)$$

$h(x)$ را در نظر بگیرید.

$$\deg h(x) < n_{k+1} = \deg f_{k+1}$$

$$\begin{cases} f_0 = a_0 x^{n_0} + \cdots \\ f_1 = a_1 x^{n_1} + \cdots \\ f_2 = a_2 x^{n_2} + \cdots \\ \vdots \\ f_k = a_k x^{n_k} + \cdots \\ f_{k+1} = a_{k+1} x^{n_{k+1}} + \cdots \end{cases}$$

یادآوری

f_{k+1} چنین چندجمله‌ای با کمترین درجه در $I - \langle f_0, \dots, f_k \rangle$ است.

از طرفی $h \in I - \langle f_0, \dots, f_k \rangle$.

زیرا اگر $h \in \langle f_0, \dots, f_k \rangle$ آنگاه $h - (\ ) = f_{k+1} \in \langle f_0, \dots, f_k \rangle$.

اطلاعات عمومی

$R[[X]]$ نوتری است.

مفهوم سری توانی

$K\{X\}$ متشکل از توابع تحلیلی نوتری است.

میانترم 5 (تا پایان ۱۲) ۲۰ اُم

پایانترم 11 (۱۱ تیر)

شفاهی ۴ (تا پایان اشباع) ۱۴ اُم بهمن

دکوره سقف ۴ (ولی ۲)