تمرین

فرض کنید T یک تئوری باشد.

نشان دهید که فرمول $\varphi(\bar{x})$ نسبت به تئوری دارای یک معادل بدون سور است

اگر و تنها اگر برای هر دو مدل $M, N \models T$ و هر زیرساختار $A \subseteq M, N$

و هر چندتایی $\bar{a} \in A$ داشته باشیم

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a}).$$

$M \models \varphi(\bar{a})$

$N \models \varphi(\bar{a})$

$M \qquad N$

A

$\varphi(\bar{a})$

بدون سور

$$\left(T \models \varphi \leftrightarrow \psi \right)$$

راهنمایی برای اثبات $\Leftarrow$

فرض کنید فرمول $\varphi(\bar{x})$ نسبت به T با فرمول بدون سور $\psi(\bar{x})$ معادل باشد.

$$T \models \forall \bar{x} \left(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}) \right)$$

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow M \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow A \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a})$$

$M \models \varphi(\bar{a}) \qquad N \models \varphi(\bar{a})$

$M \models T \qquad N \models T$

A

$\varphi(\bar{a})$

راهنمایی (تمرین)

نشان دهید که با فرض داده شده

برای هر $M \models T$ ، $a, b \in M$ ،

اگر $\mathrm{qftp}^M(a) = \mathrm{qftp}^M(b)$

آنگاه $M \models \varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$.

قضیه (تمرین)

تئوری T دارای حذف سور است

اگر و تنها اگر «زیرساختار کامل» باشد.

(یعنی اگر $M \models T$ ، $A \subseteq M$ زیرساختار، آنگاه

$\mathrm{Diag}(A) \cup T$

یادآوری

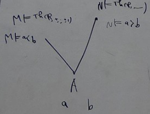
در زبان L_A یک تئوری کامل باشد؟)

تمرین

نشان دهید که فرمول $\varphi(x,y) : \exists z \ x + z^2 = y$

در تئوری کامل $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$

دارای معادل بدون سور نیست.



تمرین

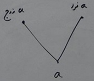
نشان دهید که در تئوری کامل $(\mathbb{Z}, +, 0)$ صفر

فرمول زیر دارای معادل بدون سور **نیست**.

$\varphi(x) : \exists y \;\; y+y=x$

x زوج است

$M \models Th(\mathbb{Z}, +, 0) \cup \bar{a}$ زوج



تمرین

اگر $X \subseteq \mathbb{R}^n$ در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ قابل تعریف باشد آنگاه ① $\bar{X}$ (بستار توپولوژیکی X) نیز قابل تعریف است.

② مجموعه نقاط درونی X قابل تعریف است.

یادآوری

ACF_0 تئوری میدان‌های بسته جبری با مشخصه صفر

$ACF_0 \equiv Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$

$\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$

قضیه

تئوری ACF_0 سورها را حذف می‌کند.

$\mathbb{C} \models \exists x \; x^2+1=0 \leftrightarrow x=x$

$\varphi(x, 1)$ بدون سور

فرض کنید $M, N \models ACF_0$ و $a \in M$, $b \in N$ و

$$\begin{array}{ccc} t \; M & & N \quad \boxed{?} \cdot d \\ \uparrow & & \uparrow \\ \langle a \rangle & \cong & \langle b \rangle \\ \| & & \\ M_0 & \cong & N_0 \end{array}$$

$ax^2+bx+c=0$

$at^2+bt+c=0$

فرض کنید $c \in M - M_0$.

هدف: پیدا کردن $d \in N - N_0$ به طوری که $\langle M_0, c\rangle \cong \langle N_0, d\rangle$

(23 بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم M_0, N_0 میدان هستند)

$M_0 \subseteq M$

(ax^2+bx+c) t

حالت اول

فرض کنید c روی M_0 جبری باشد. آنگاه c ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب در M_0 است. فرض کنید $f(x) \in M_0[x]$ چندجمله‌ای مینیمال c باشد.

$$\langle M_0, c\rangle \cong \frac{M_0[x]}{\langle f(x)\rangle}$$

از طرفی از آنجا که N بسته‌ی جبری است، چندجمله‌ای f در N نیز دارای ریشه d است.

$$\langle N_0, d\rangle \cong \frac{N_0[x]}{\langle f(x)\rangle} \cong \frac{M_0[x]}{\langle f(x)\rangle} \cong \langle M_0, c\rangle$$

$M_0 \subseteq M$ حوزه‌ی صحیح

$\left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in M_0 \right\} \longrightarrow$ میدان کسرهای M_0

$\left\{ \frac{c}{d} \;\middle|\; c, d \in N_0 \right\}$ میدان کسرهای N_0

از آنجایی که تعداد ریشه‌ی هر چندجمله‌ای در یک میدان

بسته‌ی جبری متناهی است، d پیدا می‌شود.

$$M_0 \; \overset{\text{متعالی}}{\langle a \rangle} \cong \overset{\text{متعالی}}{\langle b \rangle} \; N_0$$

$$\{ t(a) \mid t \text{ term} \} = \{ f(a) \mid f \in \mathbb{Z}[X] \}$$

$$c \in M \qquad\qquad N \quad d \in N$$

$$f_1(c) \neq 0 \quad M_0 \qquad\qquad N_0 \quad f_1(d) \neq 0$$

$$\langle M_0, c \rangle = M_0(X) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f, g \in M_0[x] \right\}$$

$$c \text{ over } M_0 \qquad d \text{ over } N_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(c) \neq 0 \\ f_2(c) \neq 0 \\ \vdots \\ f_n(c) \neq 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1(d) \neq 0 \\ f_2(d) \neq 0 \\ \vdots \\ f_n(d) \neq 0 \end{array} \right.$$

حالت دوم

c روی M_0 متعالی باشد. در این صورت

کافی است عنصر d به گونه‌ای پیدا شود که هر

تعداد متناهی معادله‌ای که c در آن صدق کند d هم در آن صدق کند.

تمرین

اگر M که میدان باشد و $N \subseteq M$ زیرحلقه $(+,\cdot,0,1)$

آن گاه نشان دهید که N یک حوزه صحیح است.

$$\left(\begin{array}{l} a,b \in N, \\ a\cdot b = 0 \rightarrow a=0 \vee b=0 \end{array}\right)$$

تمرین

فرض کنید T تئوری میدان‌ها باشد.

نشان دهید $T_\forall$ دقیقاً تئوری حوزه‌های صحیح است.

تمرین

$M \models T_\forall$ اگر و تنها اگر $\exists N \; \underset{\text{زیرساختار}}{M \subseteq N} \models T$

نتیجه

ACF. (درست است ACF_p)

سورها را حذف می‌کند.

حلقه: حلقه یکدار جابجایی

هندسه جبری مقدماتی، نظریه مدل

فرض کنید K حلقه باشد (یکدار) (عنصر صفر و ۱ و اعمال جمع و ضرب دارند)

مثال $((\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1))$

زیرمجموعه $I \subseteq K$ را یک ایده‌آل می‌نامیم هرگاه

$(I,+)$ زیرگروه از $(K,+)$. $\quad \forall x,y \in I \;\; x+y \in I$, $\; 0 \in I$

معادلاً

$$\forall r \in K \;\; \forall x \in I \;\; rx \in I$$

$$\forall r_1, r_2 \in K \;\; \forall i_1, i_2 \in I \quad r_1 i_1 + r_2 i_2 \in I$$

اگر K یک میدان باشد

$$K[X] = \{ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n \mid a_i \in K, \; n \in \mathbb{N} \}$$

حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها با ضرایب در K.

مثال: ایده‌آل موجود در این حلقه.

فرض کنید $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ (زیرمجموعه). تعریف کنید

$$V(S) = \{\bar{a} \in K^n \mid \forall f \in S \;\; f(\bar{a}) = 0\}$$

به هر مجموعه به صورت $X = V(S)$ یک مجموعه بسته زاریسکی گفته می‌شود.

Zariski closed

$$K^n$$

$$\{\bar{a} \mid f(\bar{a}) = 0 \;\; \forall f \in S\}$$

$K[X]\,[X_2, \dots]$

به صورت $= K[X_1, \dots, X_n] = K[\bar{X}]$ تعریف می‌شود.

$$a X_1 X_2^2 + a_1 X_1^3 X_2^4$$

$$K^n \quad \bigcirc \quad K[X_1, \dots, X_n]$$

$(K \times K \times \dots \times K)$

تمرین: نشان دهید که $I(A)$ یک ایده‌آل است.

مثال

$\{(x,y)\in K \mid y=x^2\}$ بسته زاریسکی است.

فرض کنید $A \subseteq K^n$ یک مجموعه دلخواه باشد.

ادامه تعریف

تعریف کنید

$$I(A)=\{f(\bar{x})\in K[\bar{x}] \mid \forall \bar{a}\in A \ f(\bar{a})=0\}$$

$$\begin{array}{ccc} K^n & & K[X_1,\dots,X_n] \\ V(S) & \longleftarrow & S \\ A & \longrightarrow & I(A) \end{array}$$