یادآوری

فرض کنید M یک ساختار باشد

مجموعه $X \subseteq M^n$ را تعریف‌پذیر (با پارامتر در A) گوییم

هرگاه یک فرمول $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ موجود باشد که در آن $\bar{a} \in A$

$$X = \{ \bar{x} \mid M \models \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \}$$

مثال

در ساختار $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$

مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، تعریف‌پذیر است. (رابینسون)

$$\mathbb{Z} = \{ x \mid \mathbb{Q} \models \varphi(x) \}$$

قضیه

(1) فرض کنید M یک ساختار

(2) $A \subseteq M$ اشباع باشد و $|A| < |M|$.

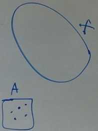
(3) X یک زیرمجموعه تعریف‌پذیر از M^n باشد.

④ هر اتومورفیسم $\sigma: M \to M$ که

مجموعه A را نقطه وار حفظ کند، مجموعه X

را مجموعه وار حفظ کند. آن گاه X که

مجموعه A ـ تعریف پذیر نوعی است.



توجه

وقتی X تعریف پذیر باشد یعنی "$x \in X$" یک فرمول است.

اثبات: بنا به فرضیات قضیه برای هر $a,b \in M$ می‌دانیم که

$$tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{b}/A) \Rightarrow \bar{a} \in X \leftrightarrow \bar{b} \in X$$

به بیان دیگر

$x \in Y_1 \leftrightarrow \varphi_1(x)$

$\varphi_1(x)$

Y_1

φ_A

بنا به فشردگی فرمول $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ پیدا می‌شوند به طوری که

$$M \models \big(\varphi_1(x) \leftrightarrow \varphi_1(y)\big) \wedge \dots \wedge \big(\varphi_n(x) \leftrightarrow \varphi_n(y)\big)$$

$$\rightarrow \big(x \in X \leftrightarrow y \in X\big)$$

(به عنوان تمرین بررسی کنید که شرط اشباع بودن M کجای اثبات استفاده شده است.)

اگر $x, y \in M$ آنگاه

$$\Big(\bigwedge_{\varphi} \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)\Big) \rightarrow \big(x \in X \leftrightarrow y \in X\big)$$

φ یک L^1_A-فرمول

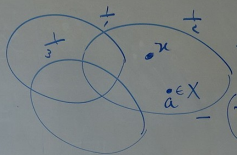
$$Th(M) \cup \Big\{\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y) \;\Big|\; \varphi \text{ یک } L^1_A\text{-فرمول}\Big\} \vdash \big(x \in X \leftrightarrow y \in X\big)$$

از بین حالات بالا رشته آن‌هایی را انتخاب کنید که با $x \in X$ در تناقض نباشند و فصل آنها را در نظر بگیرید. $\bigvee \varphi_i$

ادعا: $\bigvee \varphi_i(x) \leftrightarrow x \in X$. (تمرین) ✓

$$M \models (x \in Y_1 \leftrightarrow y \in Y_1) \wedge \dots \wedge (x \in Y_n \leftrightarrow y \in Y_n)$$

$$\to (x \in X \leftrightarrow y \in X)$$



تمام حالات ممکن برای وقوع هر x در Y_i ها را در نظر بگیرید.

مثال: $(x \in Y_1) \wedge (x \notin Y_2) \wedge \dots (x \in Y_n)$

لم

فرض کنید M یک مدل اشباع باشد

$A \subseteq M$ ، $|A| < |M|$.

فرض کنید $x \in M$ که به طور همزمان در فرمول‌های $\Sigma(x)$ صدق کند در فرمول $\varphi(x)$ صدق کند؛

$$M \models \Sigma(x) \to \varphi(x)$$

نشان دهید که در این صورت

تعداد متناهی فرمول از Σ مانند $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Sigma$

موجودند به طوری که

$$M \models \forall x \left(\varphi_1(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(x) \to \varphi(x)\right)$$

مشاهدات ساده

اگر $X \subseteq M^n$ تعریف‌پذیر باشد

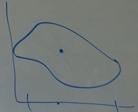
آنگاه X^C تعریف‌پذیر است.

$$X = \{x \in M \mid \varphi(x)\}$$

$$X^C = \{x \in M \mid \neg\varphi(x)\}$$

_ اگر $X \subseteq M^n \times M^m$ قابل تعریف باشد

آنگاه $\pi_{M^n}(X)$ (تصویر X روی M^n) قابل تعریف است.



$$X = \{(\bar{x},\bar{y}) \mid \varphi(\bar{x},\bar{y})\}$$

$$\pi_{M^n}(X) = \{\bar{x} \mid \exists \bar{y}\ \varphi(\bar{x},\bar{y})\}$$

_ اگر X, Y قابل تعریف باشند

$X \cap Y$

$X \cup Y$

نیز قابل تعریف هستند.

توجه

فرض کنید $M \subseteq N \models T$.

φ

و فرض کنید $\varphi(x)$ یک L-فرمول باشد.

۱) نشان دهید $\{x \in M \mid \varphi(x)\} \subseteq \{x \in N \mid \varphi(x)\}$

$m \in M$

$N \models \varphi(m) \leftrightarrow M \models \varphi(m)$

توجه

۲) اگر $M \preceq N$ و $\{x \in M \mid \varphi(x)\}$ متناهی باشد نشان دهید

$\{x \in M \mid \varphi(x)\} = \{x \in N \mid \varphi(x)\}$

$M \models \exists x\, \varphi(x)$

$M \models \exists x_1, \dots x_5 \quad \varphi(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi(x_5) \wedge$

$\varphi(a_1) \wedge \dots \wedge \varphi(a_n)$

$N \models \exists x_1, \dots x_n \quad \varphi(a_1) \wedge \dots \wedge \varphi(a_n)$

اگر $\tilde{\mathbb{R}}$ یک توسیع ناستاندارد از $\mathbb{R}$ باشد:

توجه: بازهٔ $(0,1)$ در $\tilde{\mathbb{R}}$ با بازهٔ $(0,1)$ در $\tilde{\mathbb{R}}$ یکسان نیست.

$$\mathbb{R} \models (0,1)$$

$$\mathbb{R} \prec \tilde{\mathbb{R}} \models (0,1)$$

ویژگی‌های جبری تئوری‌ها در نظریهٔ مدل

فرمول دارای سور

بی‌سور

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <) \models \left(\exists x \ ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow b^2-4ac \geq 0 \right)$$

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <) \models \forall a, b, c \left(\underbrace{\exists x \ ax^2+bx+c=0}_{} \leftrightarrow \underbrace{b^2-4ac \geq 0}_{} \right)$$

تعریف

می‌گوییم تئوری T سورها را حذف می‌کند (در زبان $\mathcal{L}$)
یا حذف سور دارد، هرگاه برای هر فرمول $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ (در زبان $\mathcal{L}$) یک فرمول بدون سور $\psi(x_1,\dots,x_n)$ (در زبان $\mathcal{L}$) موجود باشد به طوری که

$$T \models \varphi \leftrightarrow \psi$$

$$\left(T \models \forall \bar{x}\left(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})\right)\right)$$

به بیان دیگر، اگر $M \models T$ آنگاه
هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از M^n
توسط یک فرمول بدون سور تعریف‌پذیر شود.

مشاهده فرض کنید T حذف سور داشته باشد.
$M, N \models T$، $M \subseteq N$. در این صورت
آنگاه $M \preceq N$.

فرض کنید $M \subseteq N$ و فرمول $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ را
در نظر بگیرید.
یک فرمول بدون سور ψ وجود دارد به طوری که

$$T \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$$

پس

$$M \models \varphi(a_1,\dots,a_n) \iff M \models \psi(a_1,\dots,a_n)$$

$$\iff N \models \psi(a_1,\dots,a_n) \iff N \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$$

تمرین

نشان دهید که تئوری T دارای اصل بندی $\forall \bar{x}\, \varphi(\bar{x})$ است $\iff$ برای هر $M \subseteq N$ (زیرمدل) اگر $N \models T$ آنگاه $M \models T$.

قضیه

تئوری T سورها را حذف می‌کند اگر و تنها اگر برای هر مدل $M \models T$ و هر دو عنصر $a, b \in M$ اگر

$$\underbrace{qf\text{-}tp^{M}(a)}_{\downarrow} = qf\text{-}tp^{M}(b)$$

آنگاه

$$tp^{M}(a) = tp^{M}(b)$$

تایپ بدون سور

$$\{\psi \mid M \models \psi(\bar{a}),\ \psi \text{ بدون سور}\}$$

$"x \in X"$

$\Uparrow$

فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول دلخواه باشد.

اثبات

$$\Sigma = T \cup \{\psi(x) \leftrightarrow \psi(y) \mid \psi \text{ بدون پارامتر}\}$$

$$\models (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y))$$

بنابراین $T \cup \Sigma \cup \{\neg(\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y))\}$

ناسازگار است. پس یک زیرمجموعه متناهی از Σ موجود است (به نام Δ)

به طوری که $T \models \Delta \to \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)$

فرض کنید $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ پس

$$T \models (\psi_1(x) \leftrightarrow \psi_1(y)) \wedge \cdots (\psi_n(x) \leftrightarrow \psi_n(y)) \to \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)$$

$1 \qquad 1 \qquad \cancel{x \in X}$

M

$a \qquad b$

پس به اثبات قبل ترکیب از نتیجه‌ها معادل ۱ و ۲ است و این ترکیب یک فرمول بدون سور است.

$\boxed{\text{توجه}}$ فرض کنید $a,b\in M$ آنگاه $qf\text{-}tp^M(a)=qf\text{-}tp^M(b)$

از لحاظ جبری یعنی $\underbrace{\langle a\rangle^M}_{\text{ساختار تولید شده توسط a در M}} \cong \langle b\rangle^M$

$\Downarrow$ از قبل

$$\{t^M(a)\} \cong \{t^M(b)\}$$

اثبات (تمرین).

بنابراین بنا به قضیه قبل اگر تئوری T ویژگی زیر را داشته باشد سورها را حذف می‌کند.

برای هر مدل $M\models T$ و هر دو عنصر $a,b\in M$، اگر ساختار تولید شده توسط a با ساختار تولید شده توسط b ایزومرف باشد آنگاه a,b هم‌تایپ باشند.

قضیه: اگر تئوری T ویژگی زیر را داشته باشد سورها را حذف می‌کند:

(*) برای هر $a, b \in M \models T$. اگر $\langle a\rangle^M \overset{f}{\cong} \langle b\rangle^M$

آن گاه یک سامانه رفت و برگشت Γ از ایزومورفیسم‌ها میان زیرساختارهای M موجود باشد به طوری که $f \in \Gamma$.

M

$$\langle a\rangle \cong \langle b\rangle$$

اثبات: در واقع اگر * برقرار باشد از برابری $qftp^M(a)$ با $qftp^M(b)$ برابری $tp^M(a)$ و $tp^M(b)$ نتیجه می‌شود.

توجه: فرض کنید T دارای مدل اشباع باشد. T حذف سور دارد اگر و تنها اگر در مدل اشباع $M \models T$ اگر $\langle a\rangle \cong \langle b\rangle$ آن گاه یک اتومورفیسم $\sigma: M \to M$ پیدا شود به طوری که $\sigma(a) = b$.