تعریف

فرض کنید M یک L-ساختار باشد، $A \subseteq M$.

می‌گوییم مجموعه $X \subseteq M^n$ یک مجموعه A-تعریف‌پذیر است هرگاه فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ موجود باشد که در آن $a_i \in A$ و

$$X = \{(b_1, \dots, b_n) \in M^n \mid M \models \varphi(b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_m)\}$$

می‌گوییم X، $\emptyset$-تعریف‌پذیر است هرگاه

$$X = \{\bar{b} \mid \varphi(\bar{b})\}$$

$$= \{(b_1, \dots, b_n) \mid M \models \varphi(b_1, \dots, b_n)\}$$

مثال در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه زیر $\{a_1, a_2, a_3\}$-تعریف‌پذیر است (فرض کنید $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$)

$$X = \{b \in \mathbb{R} \mid a_0 + a_1 b + a_2 b^2 = 0\}$$

$$X = \{b \in \mathbb{R} \mid b^2 - 1 \neq 0\} \longleftarrow \emptyset\text{-تعریف‌پذیر}$$

مثال در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$

مجموعه $X = \{(a,b) \mid a \leq b\}$ تعریف‌پذیر است

$$X \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$X = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbb{R} \models \exists x \; a + x^2 = b\}$$

مثال

$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$

رابطه‌ی ترتیب روی $\mathbb{R}$ قابل تعریف است.

منظور: مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{R}^2$

$$= \{\underbrace{(a,b)}_{\in \mathbb{R}^2} \mid a \le b\}$$

زیر مجموعه‌ی قابل تعریف است.

$$X = \{(x,y) \mid \mathbb{R} \models \exists z \; x+z^2=y\}$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$

مثال $\{i,-i\}$ قابل تعریف است.

$$X = \{x \mid \mathbb{C} \models x^2+1=0\}$$

مثال

فرض کنید $f, g \in \mathbb{R}[X]$

$$X = \{x \mid \mathbb{R} \models f(x) < g(x)\}$$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$$X = \{x \mid ax^2+bx < cx^2+dx\}_{a,b,c,d}$$

پارامتر: a,b,c,d

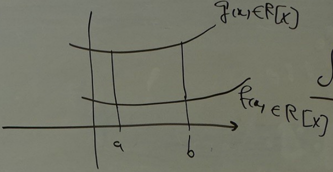
قابل تعریف است.

سوال

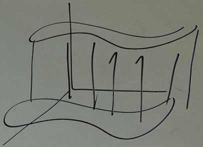
آیا در $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه اعداد طبیعی قابل تعریف است؟

پاسخ خیر! علت: بعداً

مثال



$$\{(x,y) \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$$



مثال

$$(\mathbb{C},+,\cdot,0,1)$$

$$\{(x_1,\dots,x_n) \mid f(x_1,\dots,x_n)=0,\ f\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]\}$$

سوال

$$(\mathbb{Z},+,\cdot,0,1)$$

$$X=\{(x,y)\mid x\leq y\}$$

لاگرانژ: عدد $x\in\mathbb{Z}$ مثبت است

اگر و تنها اگر حاصل جمع چهار مربع کامل باشد.

$$A=\{x\mid x\geq 0\}=\{x\mid \exists a_1,a_2,a_3,a_4\quad x=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\}$$

$$X=\{(x,y)\mid y-x\in A\}$$

$$\parallel$$

$$\{(x,y)\mid \exists a\in A\quad y=x+a\}$$

مثال $N = (\mathbb{N}, +, \cdot)$

فرمول φ موجود است به طوری که

$$N \models \varphi(e, s, t)$$

$$T_{e,s,t}$$

پس زیرمجموعه‌های محاسبه‌پذیر N تعریف‌پذیر هستند.

سوال آیا $(\mathbb{C}, +, \cdot, e, 1)$ $\mathbb{R}$

قابل تعریف است؟

مشاهده

$$\bar{a} \in A \qquad X = \{\bar{x} \mid M \models \varphi(\bar{x}, \bar{a})\}$$

فرض کنید $X \subseteq M^n$ یک مجموعه‌ی A-تعریف‌پذیر باشد.

آن‌گاه هر اتومورفیسم $\sigma : M \to M$ که A را نقطه‌وار حفظ کند $(\forall a \in A \ \ \sigma(a) = a)$

X را مجموعه‌وار حفظ می‌کند. $\left(\sigma(X) = \{\sigma(x) \mid x \in X\} = X\right)$.

اثبات

$x \in X \Leftrightarrow$

$M \models \varphi(x, \bar{a}) \Leftrightarrow$

$M \models \varphi(\sigma(x), \sigma(\bar{a})) \Leftrightarrow$

$M \models \varphi(\sigma(x), \bar{a}) \Leftrightarrow$

$\sigma(x) \in X$

توجه $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$a+bi \mapsto a-bi$

سوال آیا $\{i\}$ یک مجموعه‌ی $\mathbb{R}$-تعریف‌پذیر است؟

خیر. زیرا اتومرفیسم بالا $\mathbb{R}$ را نقطه‌وار حفظ می‌کند

ولی $i \to -i$.

سوال $(\mathbb{C},+,\cdot,0,1)$ آیا $\mathbb{R}$

قابل تعریف است؟ $L=\{+,\cdot,0,1\}$

مثال فرض کنید F یک میدان باشد $F[x]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های آن باشد.

سوال آیا F در $F[x]$ قابل تعریف است؟

$$F=\{x \in F[x] \mid \exists y \in F[x] \ \ x\cdot y = 1\}$$

فرض کنیم $\mathbb{R}$ تعریف‌پذیر باشد. آنگاه یک فرمول $\varphi(x, \bar{a})$.

تعداد متناهی جواب دارد

$A = \{\bar{a}\}$ و فرض کنید $r, s \in \mathbb{C}$

$r \underset{a}{\perp} s$ (مستقل جبری)

$r \in \mathbb{R}$

$s \notin \mathbb{R}$

$\exists \sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\sigma(a) = a$

$\forall a \in A$

$\sigma(r) = s$

زیرا $\mathbb{R}$ تعریف‌پذیر نیست.

[illegible]

نشان دهید که $\mathbb{C}$ قابل تعریف است.

$\Downarrow$

Marker

$(\mathbb{C}(X), +, -, \cdot, 0, 1)$

elliptic curve

قضیه

فرض کنید M یک مدل اشباع باشد و X یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر با پارامتر باشد، $A \subset M$.

آن‌گاه اگر X توسط هر اتومورفیسمی که A را نقطه‌وار حفظ کند مجموعه‌وار حفظ شود،

آن‌گاه X، A-تعریف‌پذیر است.

اثبات

از فرض قضیه نتیجه می‌شود که برای هر $a,b \in M$

$$tp(a/A) = tp(b/A) \Rightarrow (\underbrace{a \in X} \leftrightarrow b \in X)$$

$\varphi(a) \leftrightarrow \varphi(b)$

فرمولی که X را تعریف کند.

$$\bigwedge_{\substack{c \in A \\ \varphi \in L}} \left(\varphi(x,c) \leftrightarrow \varphi(y,c) \right) \vdash (x \in X \leftrightarrow y \in X)$$

تمرین فرض کنید M یک مدل اشباع باشد و $\pi(x)$ یک مجموعه از فرمولها باشد. آنگاه اگر $\pi(x) \vdash \varphi$ آنگاه φ از یک بخش متناهی از $\pi(x)$ نتیجه می‌شود.

($\underline{\pi(x)} \cup \underline{\{\neg\varphi\}}$ ناسازگار است. پس یک بخش متناهی Δ از $\pi(x)$ با $\neg\varphi$ ناسازگار است. پس $\Delta \vdash \varphi$.)

$(\varphi_1\wedge\neg\varphi_2)\vee(\neg\varphi_1\wedge\varphi_2)$

بنابراین فرمولهای $\varphi_1(x,c_1),\dots,\varphi_n(x,c_n)$ موجودند به طوری که

$$\left(\bigwedge_{i=1,\dots,n}\varphi_i(x,c_i)\leftrightarrow\varphi_i(y,c_i)\right)\to(x\in X\leftrightarrow y\in X)$$

به طوری که

$a\in X$

$\varphi_1(a)\wedge\varphi_2(a)\wedge\neg\varphi_3(a)$

تمام ترکیبات $\varphi_1^{\pm}\wedge\varphi_2\wedge\dots\wedge\varphi_n$ را در نظر بگیرید.

$\varphi_1\wedge\neg\varphi_2\wedge\dots\wedge\neg\varphi_n$

$\neg\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\neg\varphi_3\wedge\dots$

از میان ترکیبات بالا آن‌هایی را در نظر بگیرید که با فرمول $x\in X$ سازگارند.

$$\bigwedge\neg\psi_{i'}\vee\bigvee_i\psi_i^{(*)}\longleftrightarrow x\in X$$

ψ_i : $x\in X$ را نقض می‌کند

M اسعج

اگر X تعریف شده باشد و

X توسط اتومورفیسم‌های A را انعقاد دار

حفظ کند حفظ شود آن گاه X ، A ـ ترتیب شده را