قضیه

اگر T یک تئوری کامل باشد. آنگاه T دارای مدل اشباع شمارا است
$(M \models T \ ,\ |M| = \aleph_0 \ ,\ \aleph_0\text{-اشباع})$

$\Longleftrightarrow \ |S_n(T)| \leq \aleph_0$ (برای هر $n \in \mathbb{N}$).

توجه

$\Longleftarrow$ فعلاً ثابت نشده است.

زیرا ثابت کردیم که اگر $\aleph_0 < |S_n(T)|$

آنگاه $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$. پس برای اگر قرار باشد در M تحقق یابند

تا همه برآورده شوند، باید $|M| \geq 2^{\aleph_0}$.

$\Longrightarrow$ فرض کنید $|S_n(T)| \le \aleph_0$ (برای هر n).

فرض کنید $\{p_i(\bar{x})\}_{i\in\omega}$ شمارشی از تمام تایپ‌های موجود در تمام $S_n(T)$ ها باشد.

فرض کنید $M \models T$ شمارا باشد. یک مدل شمارای $M_1 \succ M_0 = M$ وجود دارد به طوری که p_0 در M_1 برآورده شود. فرض کنید M_n ساخته شده باشد

و $M_{n+1} \succ M_n$, $M_{n+1} \models T$ را بگیرید که تایپ p_n در M_{n+1} برآورده شود و M_{n+1} شمارا باشد.

$M_0 \prec M_1 \prec M_2 \prec \cdots$

قرار دهید $\mathbb{M} = \bigcup_{i\in\omega} M_i$.

اولاً $\mathbb{M}$ شمارا است (زیرا اجتماع شمارا از مدل‌های شمارا است).

ثانیاً تمامی تایپ‌های بدون پارامتر در $\mathbb{M}$ برآورده می‌شوند.

قبلاً ثابت کردیم که یک مدل اشباع $M \prec N$ هست

... راست که N همگن است.

$\bar{c} \quad \bar{a} \equiv \boxed{\bar{d}} \; b$

ادعا N در مدل $\aleph_1$-اشباع است.

فرض کنید $p(x) \in S_1^N(\bar{a})$.

متناهی $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

هدف نشان دادن اینکه $p(x)$ در N برآورده شود

$$p(x) = \{\varphi_1(x, \bar{a}), \ldots\}$$

تایپ زیر را در نظر بگیرید.

تایپ بدون پارامتر

$$q_T(x, \bar{y}) = \{\varphi(x, \bar{y}) \mid \varphi(x, \bar{a}) \in p(x)\}$$

$$q_T(x, \bar{y}) \in S_n(T)$$

تمرین: نشان دهید که q_2 سازگار است.

از آنجا که در M تمامی تایپ‌های موجود در $S_n(T)$ برآورده شود

عنصر $b\bar{b}_1 \in M$ هست به طوری که $q_2(x,\bar{y}) = tp(b\bar{b}_1)$. $\left(b\bar{b}_1 \models q_2(x,\bar{y}) \right)$

توجه کنید که $\bar{b}_1 \equiv \bar{a}$. $p = tp(d/\bar{a})$.

پس عنصر $d \in N$ موجود است به طوری که $b\bar{b}_1 \equiv d\bar{a}$. بنابراین

$d\bar{a} \equiv b\bar{b}_1$

① نظریه مجموعه‌ها
② منطق پیشرفته

یادآوری

فرض کنید $p(\bar{x}) \in S_n^M(A)$

$b_1, \dots, b_n$

$p(\bar{x})$ در M توسط عنصر $\bar{b}$

می‌گوییم تایپ ... برآورده شود هرگاه

$$p(\bar{x}) = tp(\bar{b}/A) = \{\varphi(\bar{x},\bar{a}) \mid \bar{a} \in A,\ M \models \varphi(\bar{b},\bar{a})\}$$

نظریه مجموعه‌ها

مجموعه‌ها توسط رابطه $\in$ خوش‌ترتیب هستند.

$|\omega_0+1| = |\omega_0| = \aleph_0$

$1, 2, 3, 4, \dots, n, n+1, n+2, \dots, \omega_0, \omega_0+1, \omega_0+2,$

$\omega_0 = \{0,1,2,\dots\}$

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$

$\omega_0+3, \dots, \omega_0+\omega_0, \omega_0+\omega_0+1, \dots,$

$\omega_1, \dots\ \omega_2, \dots$

$\omega+\omega+\omega,\ \omega\cdot\omega,$

$\aleph_1$

$\aleph_2 > \aleph_0$

هر کدام از $\{\aleph_{\alpha}\}_{\alpha\in k}$ ها یک کاردینال است.

$k \in Ord$

تعریف

فرض کنید λ اردینال باشد.

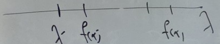
می‌گوییم $cof(\lambda)=k$ هرگاه k کوچکترین کاردینال باشد

Cofinality

به طوری که تابع $f:k\to\lambda$ موجود است که f

در λ بی‌کران است.

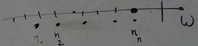
$\forall \lambda'\in\lambda\ \exists\alpha\in k\ \ f(\alpha)>\lambda'$.

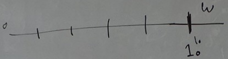


مثال. $cf(\omega)=?$

اگر $n<\omega$ آنگاه n یک عدد طبیعی است.

$n=\{0,1,\dots,n-1\}$





و n نمی‌تواند با ω هم‌پایان شود.

مثال $cf(\omega_\omega)$

$f:\omega\to\aleph_\omega$

$n\mapsto\aleph_n$

توجه. $\aleph$ یک کاردینال منظم است به طوری که $\aleph=cf(\aleph)$.

تعریف. کاردینال α را تالی نامیم هرگاه $\alpha=\kappa^+$ (ازای کاردینال κ ای).

سوال: آیا غیر از $\aleph_0$ کاردینال عدد دیگری مانند k

پیدا شود به طوری که $cf(k)=k$؟

لم: فرض کنید $k \geq \aleph_1$. آن گاه $cf(k^+)=k^+$.

(k^+: این کاردینال پس از k)

باید نشان دهیم که

اثبات: $cf(k^+)\neq k$. فرض کنید $f:k\to k^+$ هم‌پایان باشد.

آن گاه $f[k]$ ($=\{f(\alpha)|\alpha\in k\}$) در k^+ کران‌دار است. در واقع $\bigcup_{\alpha\in k} f(\alpha)\in k^+$.

قضیه

فرض کنید $T \models \mathcal{M}$. آن گاه برای هر کاردینال $k > \aleph_0$

یک مدل $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ پیدا می‌شود به طوری که $|N| \leq |M|^k$

و $\mathcal{N}$ یک مدل k^+-اشباع باشد.

$p \in S_1^{\mathcal{N}}(A)$

برای این که $\mathcal{N}$، k^+-اشباع باشد باید تمام تایپ‌های

که در آن $|A| \leq k$ در $\mathcal{N}$ برآورده شوند.

قرار دهید $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$. تعداد تمام زیرمجموعه‌های k عضوی M حداکثر

برابر است با $|M|^k$. تعداد تمام 1-تایپ‌ها روی تمام زیرمجموعه‌های k عضوی M

برابر است با $\geq |M|^k$.

فرض کنید $\{P_\lambda\}$ شمارشی از تمام تایپ‌ها باشد.

$\lambda < |M|^k$

زنجیر مقدماتی (M_α) را به گونه‌ای بسازید که

$$\overset{N}{\overset{\shortparallel}{\bigcup}} M_\alpha$$

تمام تایپ‌های متعلق به $\{P_\lambda\}_{\lambda<|M|^k}$

$\alpha < |M|^k$

$|M_\alpha| = |M|$.

بنابراین

$$\left|\bigcup M_\alpha\right| \le |M|^k$$

برآورده شوند.

زنجیر (N_α) را بسازید، اجتماع زنجیر $\bigcup_{\alpha\in k^+} N_\alpha$

$\alpha \in k^+$

قرار دهیم $N = N$.

$$\left|\bigcup_{\alpha\in k^+} N_\alpha\right| \le |M|^k.$$

بنابراین k^+-اشباع است.

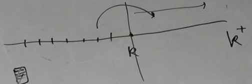
$k > \aleph$

فرض کنید $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in k^+} N_\alpha$ ، $|A| \le k$

از آنجا که $cf(k^+) > k$ یک عدد N_α پیدا می‌شود:

داریم که $A \subseteq N_\alpha$. حال هر تایپ روی A در $N_{\alpha+1}$

برآورده می‌شود.



$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$

$|A| = \aleph$.

نتیجه ① اگر $k^+ = 2^k$ آنگاه یک مدل اشباع از سایز k^+ موجود است.

نتیجه 2. اگر فرضیه پیوستار درست باشد همواره مدل‌های اشباع از سایز k^+ موجود است (برای هر k).

قضیه

فرض کنید T کامل باشد. آنگاه T دارای یک مدل (پرداده)

از سایز کلاس دارد که κ-اشباع برای هر کاردینال κ است.

Class-Sized

تعریف: به این مدل، مدل هیولا (مشترک) گفته می‌شود.

Monster

تمرین

فرض کنید $M \models T$ و برای هر $i \in \omega$، $M_i = M$.

فرض کنید $\mathcal{U}$ فرافیلتر فرش روی $\mathbb{N}$ باشد. نشان دهید $\prod M_i / \mathcal{U}$ یک مدل $\aleph_1$-اشباع است.