تمرین

فرض کنید M یک مدل اشباع باشد.

و $a, b \in M$. نشان دهید که

$|A| < |M|$ ، $tp(a/A) = tp(b/A)$

اگر و تنها اگر یک اتومورفیسم $\sigma : M \to M$

وجود داشته باشد به طوری که $\sigma(a) = b$ ، σ اعضای A را نقطه‌وار

ثابت کند.

تمرین

$|M| = |N|$

فرض کنید $M, N \models T$ دو مدل اشباع هم‌اندازه

باشند. نشان دهید که اگر $M \equiv N$ آنگاه

$M \cong N$.

تمرین

اگر T یک تئوری κ-جازم باشد (یعنی هر دو مدل T از اندازه

κ با هم ایزومورف باشند). آنگاه تنها (در حد یکریختی)

مدل T از سایز κ، اشباع است.

T کامل، $\mathcal{L}$ شمارا

تمرین

فرض کنید $M \models T$.

نشان دهید که مدل k-اشباع

$M \preceq N$ موجود است.

وجود مدل‌های اشباع

لم: مدل M k-اشباع است

اگر و تنها اگر هر تایپ $p \in S_1^M(A)$

با $|A|<k$ در M برآورده شود.

ایده اثبات

فرض کنید تایپ‌های n متغیره در M برآورده شوند.

ادعا: اگر $p \in S_{n+1}^M(A)$

$|A|<k$

آنگاه عناصر $a_1,\dots,a_{n+1} \in M$

موجودند به طوری که $(a_1,\dots,a_{n+1}) \models p(\bar{x})$.

$P(x_1,\dots,x_{n+1})$

$= \{ \varphi(x_1,\dots,x_{n+1}), \dots \}$

$q_r(x_1,\dots,x_n) = P$

$(x_1,\dots,x_n)$

تمام زوج‌های موجود در P

با n متغیر

نتیجه: فرض استقرا عنصر $a_1,\dots,a_n \in M$

موجودند به طوری که $a_1,\dots,a_n \models q_r(x_1,\dots,x_n)$

$q(x_1,\dots,x_n) = tp\left(\frac{a_1,\dots,a_n}{A}\right)$

مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$P(x) = \{ \varphi(a_1,\dots,a_n,x) \mid \varphi(x_1,\dots,x_{n+1}) \in P \}$

$P(x_1,\dots,x_{n+1}) = \{ \varphi(\underbrace{x_1,\dots,x_n}) $

T کامل، L شمارا

تعداد پارامترهای p':

$$\left| A \cup \{a_1,\dots,a_n\} \right| = |A|$$

ادعا: $p'(x)$ تحقق‌پذیر است.

اگر این ادعا ثابت شود آن گاه حکم اثبات شده است. زیرا

بنا به فرض استقرا عنصر $a_{n+1} \models p'$ وجود دارد $a_1,\dots,a_{n+1} \models p$.

چرا $p'(x)$ سازگار است؟

$$\varphi_1(a_1,\dots,a_n,x) \wedge \varphi_2(a_1,\dots,a_n,x) \in p'(x)$$

$$M \models \exists x\, \varphi_1(a_1,\dots,a_n,x) \wedge \varphi_2(a_1,\dots,a_n,x)$$

:

توجه: $p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$ را در جدول بالاتر برآورده شود

فرض $b_1,\dots,b_n,b_{n+1}$.

داریم $b_1,\dots,b_n \equiv a_1,\dots,a_n$

$$tp\left(\frac{b_{n+1}}{b_1,\dots,b_n A}\right) = tp\left(\frac{x}{a_1,\dots,a_n A}\right)$$

x بنا به n-متغیر اشباع بودن M وجود دارد. $b_1,\dots,b_{n+1} \equiv a_1,\dots,a_n x$

تعریف

فرض کنید T یک تئوری کامل باشد.

می‌گوییم $p(x_1,\dots,x_n)\in S_n(T)$

هرگاه $p(x_1,\dots,x_n)\in S_n^{M}(\emptyset)$ برای یک (مدل) $M\models T$.

مجموعه تایپهای بدون پارامتر $S_n(T)$

$tp(b_1,\dots,b_n/A)$

$N \models \exists x\, \varphi(b_1,\dots,b_n,x)\wedge \varphi_2(b_1,\dots,b_n,x)$

$\Rightarrow M \models \exists x\, \varphi(a_1,\dots,a_n,x)\wedge \varphi_2(a_1,\dots,a_n,x)$

بنابراین $p(x)$ سازگار است.

T کامل، L شمارا

سوال

$M \models T$

$A \subseteq M$

$|A| = k \geq \aleph_0$

L-شمارا

ثابت کنید $\left|S_n^M(A)\right| \leq 2^k$

$\varphi(x, \bar{a})$ $\quad \bar{a} \in A$

تعداد کل فرمولها با پارامتر در A: k

لم

اگر $\left|S_n(T)\right| > \aleph_0$ آنگاه

$$\left|S_n(T)\right| = 2^{\aleph_0}$$

فرضیه پیوستار: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

اولین عدد بعد از $\aleph_0$

تمرین

نشان دهید که تئوری T، $\aleph_0$-جازم است

اگر و تنها اگر $\left|S_n(T)\right|$ متناهی باشد

$(\forall n)$

اثبات لم

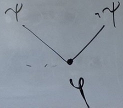
تعداد تایپها نامتناهی است

تعداد فرمولها شمارا است.

پس یک فرمول $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ هست که در نامتناهی تا تایپ قرار دارد. چون اگر هر فرمول در شمارا تا تایپ باشد از آنجا که تعداد فرمولها شمارا است تعداد تایپها شمارا می‌شود.

$$[\varphi(x_1,\dots,x_n)] = \{p(x_1,\dots,x_n) \in S^n(T) \mid \varphi(x_1,\dots,x_n) \in p\}$$

ادعا: فرمول ψ وجود دارد به طوری که $[\varphi\wedge\psi]$ و $[\varphi\wedge\neg\psi]$ هر دو نامتناهی هستند.



T کامل و L شمارا است.

مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$q(x_1,\dots,x_n) = \{\psi \mid |[\varphi\wedge\psi]| > \aleph_0\}$$

با n متغیر

بنا به فرض خلف برای هر فرمول ψ اگر $\psi \notin q$ آنگاه $\neg\psi \in q$ و به علاوه برای هر ψ یا $\psi \in q$ یا $\neg\psi \in q$.

$$(*) \quad [\varphi] = [\varphi\wedge\psi] \cup [\varphi\wedge\neg\psi]$$

اگر یکی از دو مجموعه‌ی بالا شمارا باشد دیگری ناشمارا است.

اثبات ادعا

به برهان خلف فرض کنید که چنین نباشد.

یعنی برای هر فرمول ψ یا $[\varphi\wedge\psi]$ یا $[\varphi\wedge\neg\psi]$ شمارا باشند.

برای هر ψ یا $p \ni \psi$ یا $p \ni \neg\psi$. به علت (*)

نمی‌شود که هر دو $p \ni \psi$ و $p \ni \neg\psi$. به علت فرض مثل.

ادعا $p(x_1,\dots,x_n)$ یک تایپ کامل است.

فرض کنید $p \ni \psi_1,\dots,\psi_n$

$p \ni \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n$ ✓

$p \not\ni \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n$ آنگاه $p \ni \neg\psi_1 \vee \dots \vee \neg\psi_n$ $\Leftarrow$

$[\varphi \wedge (\neg\psi_1 \vee \dots \vee \neg\psi_n)]$ ناتهی است.

$\parallel$

$\underbrace{[\varphi \wedge \neg\psi_1]} \cup \dots \cup \underbrace{[\varphi \wedge \neg\psi_n]}$ ناتهی است. تناقض با این که این‌ها همه تهی هستند.

T کامل، $\mathcal{L}$ شمارا

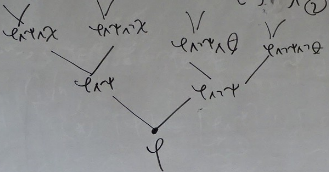
تا اینجا ثابت کردیم که

① فرمول φ وجود دارد به طوری که $[\varphi]$ ناشماراست.

② اگر $[\varphi]$ ناشمارا باشد حتماً یک فرمول ψ وجود دارد به طوری که

$[\varphi\wedge\psi]$ ناشمارا

$[\varphi\wedge\neg\psi]$ ناشمارا



خلاصه

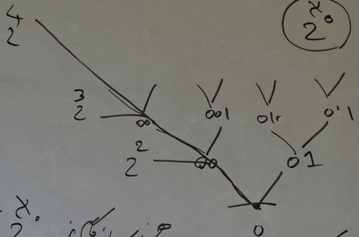
اگر برای هر فرمول ψ یا $[\varphi\wedge\psi]$ یا $[\varphi\wedge\neg\psi]$ شمارا باشد آنگاه $q_\varphi = \{\psi \mid [\varphi\wedge\psi] \text{ ناشمارا}\}$ یک تایپ کامل است.

$$[\varphi] = \bigcup_{\psi \text{ فرمول}} [\varphi\wedge\psi] = \bigcup_{[\varphi\wedge\psi] \text{ شمارا}} [\varphi\wedge\psi] \cup \{q_\varphi\}$$

پس $[\varphi]$ شمارا است، تناقض

سوال تعداد مسیرها در این درخت چقدر است؟

$2^{\aleph_0}$



از آنجا که مسیرهای متفاوت با هم ناسازگارند $2^{\aleph_0}$ تایپ داریم.

نتیجه:

اگر $\aleph_0 < |S_n(T)|$ آنگاه T دارای مدل شمارا اشباع نیست.