یادآوری $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)\in M^n$

اگر $A\subseteq M$ ، $b\in M$

$$tp(b/A)=\{\varphi(x_1,\dots,x_n,\bar{a}) \mid \bar{a}\in A,\ M\models\varphi(b,\bar{a})\}$$

تعریف: فرض کنید $a,b\in M$ بگونه‌ای باشند که

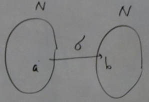
$a\equiv_M b$

$(tp^M(a)=tp^M(b))$

آنگاه یک گسترش مقدماتی $M \prec N$

و یک اتومرفیسم $\sigma: N\to N$ موجود است

بطوری که $\sigma(a)=b$.



اثبات

اولاً توجه کنید که نگاشت

$$f_0: M\to M$$
$$a\mapsto b$$

یک نگاشت مقدماتی جزئی است.

$$M\models\varphi(a)\Leftrightarrow M\models\varphi(f(a))$$

فرض کنید که $M=(m_\alpha)_{\alpha<\lambda}$

f_0

f_1

f_2

$\vdots$

$f_\omega=\bigcup f_n$

حد $\swarrow$ $f_{\omega+1}$

$\vdots$

هدف: ساختن نگاشتهای جزئی مقدماتی

برای $\alpha<\lambda$ $\quad f_\alpha : N_\alpha \longrightarrow N_\alpha$

به گونه‌ای اگر $\alpha_1<\alpha_2$ آن گاه

$M \preceq N_\alpha$ ، $f_{\alpha_1} \subseteq f_{\alpha_2}$

$N_{\alpha_1} \preceq N_{\alpha_2}$ و به طوری که
$$\begin{cases} m_\alpha \in \mathrm{Dom}\, f_{\alpha+1} \\ m_\alpha \in \mathrm{range}(f_{\alpha+1}) \end{cases}$$

در مراحل حدی اجتماع نگاشتهای قبل را بگیرید.

فرض کنید $f_\alpha : N_\alpha \longrightarrow N_\alpha$ ساخته شده است.

دیگر نگاشت جزئی مقدماتی است.

توجه: $f: A \to B$ $\quad (A \subseteq M,\ B \subseteq N)$ مقدماتی است یعنی

$\forall \bar{a} \in A \quad \forall \varphi \quad M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(f(\bar{a}))$

برای ساختن $f_{\alpha+1}$ به گونه‌ای زیر عمل کنید.

$f_\alpha : N_\alpha \longrightarrow N_\alpha$

برای مثال برای ساختن f_1 از روی f_0 به صورت زیر عمل کنید.

$f_0 : a \longrightarrow b$

اضافه کردن m_0 به دامنه:

$\varphi(m_0, a) \longleftrightarrow \varphi(x, b)$

$m_0\, a \equiv \Box\, b$

هدف: پیدا کردن یک عنصر t به طوری که

$tp(m_0/a) = tp(t/b)$

به بیان دیگر می‌خواهیم عنصر t را به گونه‌ای پیدا کنیم که برای هر فرمول

$M \models \varphi(m_0, a) \leftrightarrow N \models \varphi(t, b)$

مجموعه‌ی زیر از فرمول‌ها را در نظر بگیرید:

$p(x) = \{ \varphi(x, b) \mid M \models \varphi(m_0, a) \}$

هر تعداد متناهی از فرمول‌ها در مجموعه‌ی بالا در M برآورده می‌شوند. فرمول‌های زیر را در نظر بگیرید.

اثبات:

$M \models \exists x\, \varphi_1(x, b) \wedge \varphi_2(x, b) \wedge \varphi_3(x, b)$

اثبات ادعا

$M \models \exists x\, \underbrace{\varphi_1(x, a) \wedge \varphi_2(x, a) \wedge \varphi_3(x, a)}$

و $a \equiv b$ بنابراین

$M \models \exists x\, \varphi_1(x, b) \wedge \varphi_2(x, b) \wedge \varphi_3(x, b)$

بنابراین $p(x)$ یک تایپ روی M است. بنابراین مدل $M \preceq N$

که در آن یک عنصر t وجود دارد به طوری که t تایپ $p(x)$ را برآورده می‌کند.

$M = (m_\alpha)_{\alpha<\lambda}$

$N_\alpha \to N_\alpha$

فرض کنید تمامی f_α ها به گونه‌ای که ذکر شد ساخته شده باشند

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \overset{f}{—} & N_1 \\ \uparrow & & \\ M & — & N \end{array}$$

$$N_1 \longrightarrow N_2$$

قرار دهید:

$$f : \bigcup N_\alpha \to \bigcup N_\alpha$$

$$f := \bigcup_{\alpha<\lambda} f_\alpha$$

نکات $f : N_2 \to N_2$ جزئی مقدماتی است.

توجه کنید که برای هر $m_\alpha \in M$ داریم $m_\alpha \in Dom\, f$, $m_\alpha \in rang\, f$

مجموعه فرمول‌های

$$p(x) = \left\{ \varphi(x, m_0, a) \;\middle|\; N \models \varphi(m_0, t, b) \right\}$$

در هر مرحله تابع $f_{\alpha+1}$ را تعریف

مدل $N_{\alpha+1}$ را به گونه‌ای پیدا کرده که $m_\alpha \in Dom\, f_{\alpha+1}$, $m_\alpha \in rang\, f_{\alpha+1}$

$$\begin{array}{cc} M & N \\ & \uparrow \\ m_0\, a & \equiv\; t\, b \end{array}$$

توجه برای هر فرمول φ داریم:

$$M \models \varphi(m_0, a) \Leftrightarrow N \models \varphi(t, b)$$

N'' $\Rightarrow$ N'

ادامه

$$m_0 a \boxed{u} \equiv t b \boxed{m_0}$$

$$N_1 = N''$$

ت به همین روند را برای N_1 انجام دهیم

$$N_1 \preceq N_2 \preceq N_3 \preceq \dots$$

$$f_2 : N_2 \to N_2$$

تمامی عناصر N_1 در دامنه و برد آن باشند

برای ترتیب $(N_k)_{k\in\omega}$ را بسازیم.

$$\bigcup f_n : \bigcup N_n \to \bigcup N_n$$

یکریختی روی

$a,b\in M$

ثابت کردیم که اگر $a\equiv b$

آنگاه $\exists N \succeq M$

$$\sigma : N \to N$$

$$\sigma(a)=b$$

توجه

N که در قضیه قبل ساخته شد دارای ویژگی زیر است

اگر $a,b\in N$ ،

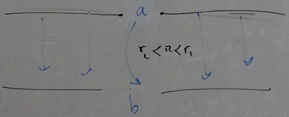
$$a\equiv b$$

و $c\in N$. آنگاه $d\in N$ وجود دارد به طوری که

$$ac\equiv bd.$$

$(\mathbb{R}, <)$

$tp(\pi/\mathbb{Q})$
$\quad\;<$



توجه

σ، A را نقطه‌وار حفظ کند یعنی

$\forall t \in A \quad \sigma(t) = t$

σ، A را مجموعه‌وار حفظ کند

$\sigma(A) = A$

$t \in A \to \sigma(t) \in A$

دقت کن

تعمیم قضیه

$a, b \in M$

اگر $A \subseteq M$ ، $tp(a/A) = tp(b/A)$

آنگاه $\exists N \succ M$

$\sigma : N \to N$

به طوری که σ، A را نقطه‌وار حفظ کند و $\sigma(a) = b$.

$\boxed{\forall t \in A \quad \sigma(t) = t}$

مدل‌ها
سرتیتر

اشباع Saturated

فرض کنید T یک تئوری کامل در یک زبان شمارا باشد

و فرض کنید $M \models T$. می‌گوییم که M یک مدل κ-اشباع است

هرگاه برای هر مجموعه پارامتر $A \subseteq M$ بطوری که $|A| < \kappa$ و هر تایپ در $p(x) \in S_n^M(A)$

عنصری مانند $u \in M$ وجود داشته باشد بطوری که

$n \geq 1$ $\quad p(x_1, \ldots, x_n)$

$u \models p(x)$

یعنی

$M \models \varphi(\bar{u})$

$\forall \varphi \in p(\bar{x})$

مدل $M \models T$ را اشباع می‌نامیم هرگاه

برای هم $|M|$-اشباع باشد.

مدل M را $\aleph_0$-اشباع می‌نامیم هرگاه

هر تایپ روی یک مجموعه متناهی A در M برآورده شود.