یادآوری

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک L-ساختار باشد و $A \subseteq M$ زیرمجموعه.

می‌گوییم $p(\bar{x}) \in S_n^{M}(A)$ یک تایپ کامل در M روی A است هرگاه

① $p(\bar{x})$ یک مجموعه (شاید) ناتناهی از فرمول‌های به صورت $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ است که در آن $\bar{a} \in A$ (تغییر می‌کند) ولی متغیرها یکسان هستند.

$$p(\bar{x}) = \{\varphi(\bar{x},\bar{a}) \mid \bar{a} \in A\}$$

$$p(x) \in S_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \{x>1, x>2, x>3, \dots\}$$

② برای هر تعداد متناهی فرمول $\varphi_1(\bar{x},\bar{a}_2), \dots, \varphi_n(\bar{x},\bar{a}_n) \in p(\bar{x})$ یک عنصر $b \in M$ وجود دارد به طوری که

$$M \models \varphi_1(b,\bar{a}_2) \wedge \dots \wedge \varphi_n(b,\bar{a}_n)$$

$$p(\bar{x}) = \{\varphi(x,a_1), \psi(x,a_2), \dots\}$$

$$a_i \in A \subseteq M$$

$$\varphi(\bar{x},\bar{a}_1) \wedge \psi(\bar{x},\bar{a}_2)$$

$$\exists b \in M \quad M \models \varphi(b,a_1) \wedge \psi(b,a_2)$$

③ برای هر فرمول $\varphi(x,\bar{a})$ با پارامتر در A یا $\varphi(x,\bar{a}) \in p(\bar{x})$ یا $\neg\varphi(x,\bar{a}) \in p$.

مثال: $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$

$$\Pi(\bar{x}) = \{ \underbrace{x > 1, x > 1+1, x > 1+1+1}, \dots \}$$

- مجموعه‌ی پاسخ: $\emptyset$
- هر تعداد متناهی از فرمول‌های $x > n$ در $\mathbb{N}$ برآورده می‌شوند.
- ولی همه‌ی این فرمول‌ها به صورت همزمان در $\mathbb{N}$ برآورده نمی‌شوند.

تعریف: فرض کنید M یک ساختار باشد. $A \subseteq M$، $b \in M$.

$$tp^M(b/A) = \{ \underbrace{\varphi(\bar{x}, \bar{a})} \mid \bar{a} \in A, M \models \varphi(b, \bar{a}) \}$$

" تمامی ویژگی‌های مرتبط با b

نکته: $tp^M(b/A)$ یک تایپ کامل است.

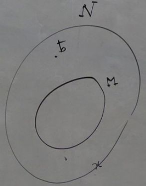
یادآوری

اگر M یک ρ-ساختار باشد و $p(\bar{x}) \in S_n^M(A)$.

آن گاه یک ساختار $M \prec N$ (توسیع مقدماتی) موجود است که در آن عنصری مانند $\bar{b}$ موجود است به طوری که

$$p(\bar{x}) = tp^N(\bar{b}/A).$$

می‌گوییم $\bar{b}$ تایپ p را برآورده می‌کند.



مثال نشان دهید که یک توسیع مقدماتی از $(\mathbb{N},+,\cdot,0,1,<)$ وجود دارد که در آن عنصری نااستاندارد پیدا می‌شود (یعنی عنصری که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر است).

پاسخ مجموعهٔ $\Sigma(x)=\{x>1,\ x>1+1,\ x>1+1+1,\ldots\}$ در $\mathbb{N}$ متناهیاً ارضاپذیر است. پس در یک توسیع مقدماتی $\mathbb{N} \prec N$ عنصری مانند a موجود است که تمام فرمول‌های موجود در Σ را برآورده می‌کند.

$a \in M$

$\underline{\text{تع}}$

$tp^{M}(a/A) = \{ \varphi(x) \mid M \models \varphi(a) \}$

$A \subseteq M \preccurlyeq N \qquad a \in M$

$\underbrace{tp^{M}(a) = tp^{N}(a)}$

$\boxed{M \prec N \qquad p(x) = tp^{N}(a) \quad \text{یعنی} \quad p(x) \in S^{M}_{1}(\emptyset) \ (1)}$

$p(x_1, \dots, x_n) = tp^{N}\left(\frac{a_1, \dots, a_n}{A}\right) \Leftrightarrow p(x_1, \dots, x_n) \in S^{M}_{n}(A) \ (2)$

$M \prec N$

$p(x_1, \dots, x_n) \in S^{M}_{n}(A)$

$\|$

$\{ \underbrace{\varphi(\underline{x_1, \dots, x_n}, \bar{a})} \} \quad \underline{x_1 = x_1}$

$(\mathbb{R}, <)$ $\underline{\text{مثل}}$

$p(x) \in S^{\mathbb{R}}_{1}(\mathbb{Q})$

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

$tp(\sqrt{2}/\mathbb{Q}) = \{ \varphi(x, a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}, \ \mathbb{R} \models \varphi(\sqrt{2}, a_1, \dots, \underline{a_n}) \}$

$tp\left(\frac{\sqrt{2}}{\mathbb{Q}}\right) \supseteq \{ x > 1, \ x < 2, \dots \}$

تعریف

فرض کنید M یک L-ساختار باشد و $c_1,\dots,c_n \notin L$، $a_1,\dots,a_n \in M$. منظور از $L\cup\{c_i\}$-ساختار $(M, a_1,\dots,a_n)$ ساختاری است که با تعبیر $c_i^M = a_i$ بدست آید.

لم) فرض کنید M, N دو L-ساختار باشند، $a \in M$، $b \in N$. آنگاه $tp^M(a) = tp^N(b)$

$(M \models \varphi(a) \Rightarrow N \models \varphi(b))$

هرگاه دو $L\cup\{c\}$ ساختار $(M,a), (N,b)$ هم‌ارز مقدماتی باشند.

$$(M,a) \overset{L\cup\{c\}}{\equiv} (N,b)$$

$\varphi(c)$

نتیجه

اگر $tp^M(a) = tp^N(b)$ آنگاه ساختار

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{M} & \\ (M,a) \arrow[ur, "\preceq"] & & (N,b) \arrow[ul, "\text{بطور مقدماتی نشاند}"'] \end{tikzcd}$$

و $c \in \mathbb{M}$ موجود است بطوری که

$$tp^{\mathbb{M}}(c) = tp^M(a) = tp^N(b)$$

$$(M,a) \equiv_{L\cup\{c\}} (N,b)$$

$$\begin{tikzcd} & M, \bar c & \\ M\ \bar a \arrow[ur] & & N\ \bar b \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

لم)

فرض کنید M, N دو L-ساختار باشند.

$a \in M$, $b \in N$.

فرض کنید که یک سامانهٔ دقت دو گانه از ایزومرفیسمی میان زیرساختارهای M، N موجود باشد که نگاشت $f_0 : \langle a\rangle^M \to \langle b\rangle^N$ جزء آن باشد.

آنگاه

$$tp^M(a) = tp^N(b)$$

$$N \xrightarrow{\sigma} N$$
$$a \longmapsto b$$
$$a \in M \qquad b \in M$$

قضیه

فرض کنید M یک ساختار باشد ، $a, b \in M$.

آن گاه $tp^{M}(a) = tp^{M}(b)$ اگر و تنها اگر یک ساختار $M \prec N$

و یک اتومورفیسم $\sigma : N \to N$ موجود باشند به طوری که $\sigma(a) = b$.

نکته (پرانتز)

فرض کنید $p(x) \in S^{M}(A)$ یک تایپ کامل در M باشد.

آن گاه یک $M \prec N$ که در آن به ازای عنصر a پیدا شود

به طوری که $tp^{N}(a/A) = p(x)$.

$$\sigma : M \to M$$
$$\wedge \qquad \wedge$$
$$\sigma : N \to N$$

مثال

$f(x) \in M[X]$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$\sigma : M \to M$

$\sigma(x_1) = x_2$

اثبات قضیه

فرض کنید که ساختار $M \prec N$ و اتومورفیسم $\sigma : N \to N$ وجود داشته باشد به طوری که $\sigma(a)=b$.

دقت کنید برای هر فرمول $\varphi(x)$ داریم:

$$N \models \varphi(a) \Leftrightarrow N \models \varphi(\sigma(a)) \Leftrightarrow N \models \varphi(b)$$

اثبات قسمت دیگر

فرض کنید $M = (m_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ شمارشی برای M باشد.

نگاشت $f_0 : a \to b$ یک نگاشت مقدماتی جزئی است، یعنی

برای هر فرمول $\varphi(x)$ داریم: (چون $tp^M(a) = tp^M(b)$)

$$M \models \varphi(a) \Leftrightarrow N \models \varphi(f(a)) \Leftrightarrow M \models \varphi(b)$$

$$a \longrightarrow b$$

فرض کنید c عنصری از M باشد.

$$a \equiv b$$

$$ac \equiv bx$$ مجهول

تایپ زیر را در نظر بگیریم:

$$p(x) = tp(c/a) = \{\varphi(x,a) \mid M \models \varphi(c,a)\}$$

تایپ زیر را در نظر بگیرید:

$$q(x) = \{\varphi(x,b) \mid \varphi(x,a) \in p(x)\}$$

هدف: پیدا کردن یک عنصر که تایپ بالا را برآورده کند.

اگر d تایپ بالا را برآورده کند آنگاه

$$tp^{M}(ac) = tp^{M}(bd)$$

$$a \longrightarrow b$$

$$ac \longmapsto bd$$

سوال

چرا $q(x)$ یک تایپ است؟ (سازگار است؟)

$$M \models \exists x \; \varphi_1(x,b) \wedge \varphi_2(x,b) \wedge \varphi_3(x,b) \quad ?$$

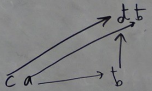
می‌دانیم که $M \models \exists x \; \varphi_1(x,a) \wedge \varphi_2(x,a) \wedge \varphi_3(x,a)$ و $tp(a) = tp(b)$ بنابراین

$$M \models \exists x \; \varphi_1(x,b) \wedge \varphi_2(x,b) \wedge \varphi_3(x,b)$$

از آنجایی که $tp(a)$ کرانیاب است که توسیع مقدماتی $M \prec N$

، $d \in N$ پیدا می‌شود به طوری که

$$tp^{M}(ac) \equiv tp^{N}(bd)$$



بیان دقیق اثبات

فرض کنید $M = (m_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ ، نگاشت $f: a \to b$ را در نظر بگیرید.

هدف: ساختن نگاشت‌های $\underbrace{f_\alpha : N_\alpha \to N_\alpha}_{\text{مقدماتی جزئی}}$ به گونه‌ای که هر کدام N_α ها توسیع مقدماتی M باشند و $N_\alpha \prec N_\beta$ (اگر $\alpha < \beta$).

- $m_\alpha \in dom(f_{\alpha+1})$
- $m_\alpha \in rang(f_{\alpha+1})$

توجه: تا این لحظه M به گونه‌ای پیدا شده است که

$$M \prec N$$

$\sigma : N \to N$ جزئی

$M \subseteq \mathrm{dom}\,\sigma$

$M \subseteq \mathrm{rang}\,\sigma$

اگر $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ ساخته شده باشند و λ حدی باشد

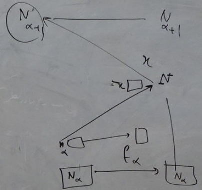
$$f_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} f_\alpha .$$

بدین ترتیب تابع $\{f_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ ساخته می‌شود.

$$F = \bigcup f_\alpha : \bigcup N_\alpha \to \bigcup N_\alpha$$

$$\mathrm{Dom}\,F \supseteq M$$

$$\mathrm{Rang}\,F \supseteq M$$



فرض کنید f_α ساخته شده است

$$f_\alpha : N_\alpha \to N_\alpha$$

برای ساختن $f_{\alpha+1}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$tp\left(\frac{m_\alpha}{\mathrm{Dom}(f_\alpha)}\right) = tp\left(\frac{x}{\mathrm{Im}(f_\alpha)}\right)$$

$$tp\left(\frac{m_\alpha}{\mathrm{rang}\,f_\alpha \cup x}\right) = tp\left(\frac{y}{\mathrm{Dom}\,f_\alpha \cup m_\alpha}\right)$$