تئوریهای کامل

تمرین یک تئوری کامل دارای مدل نامتناهی برای گرافها در زبان $\mathcal{L}=\{R\}$ بنویسید. (گرافهای تصادفی)

تمرین یک تئوری کامل برای روابط هم‌ارزی در زبان $\mathcal{L}=\{E(x,y)\}$ دارای مدل نامتناهی بنویسید.

تمرین یک تئوری کامل برای دو رابطه هم‌ارزی $\{E_1, E_2\}$ بنویسید (دارای مدل نامتناهی)

$$\bar{x}=x_1,\dots,x_n$$

تعریف

فرض کنید $\Sigma(\bar{x})$ مجموعه‌ای از فرمولهای مرتبهٔ اول با متغیرهای مشترک $\bar{x}$ باشد:

$$\Sigma=\{\varphi_1(\bar{x}),\varphi_2(\bar{x}),\dots\}$$

می‌گوییم $\Sigma(\bar{x})$ با T سازگار است هرگاه ($T\cup\Sigma(\bar{x})$ سازگار است)

برای هر تعداد متناهی فرمول $\varphi_1(\bar{x}),\dots,\varphi_n(\bar{x})\in\Sigma(\bar{x})$ تئوری $T\cup\{\exists\bar{x}\,\varphi_1(\bar{x})\wedge\dots\wedge\varphi_n(\bar{x})\}$ سازگار باشد.

بیان دیگر: می‌گوییم $\Sigma(\bar{x})\cup T$ سازگار است هرگاه در زبان $\mathcal{L}_C=\mathcal{L}\cup\{c_1,\dots,c_n\}$ تئوری $\Sigma(\bar{c})\cup T$ سازگار باشد.

$$\mathcal{L}_C \qquad \{\varphi_1(\bar{c}),\varphi_2(\bar{c}),\dots\}\cup T$$

تعریف

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$-ساختار باشد و $A \subseteq M$ زیرمجموعه

فرض کنید $\pi(\bar{x}, A)$ مجموعه‌ای از فرمول‌ها با متغیر مشترک $\bar{x}$ و با پارامتر در A باشد.

$\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ $\quad \bar{a} \in A$

مثال $\quad A = \mathbb{N} \quad , M = (\mathbb{Q}, <)$

$$\pi(x,A) = \{x>1, x>2, x>3, \dots\}$$

مثال $\quad A = \mathbb{Q} \quad , M = (\mathbb{R}, <)$

$$\pi(x,A) = \{\underbrace{r_2 > x > r_1}\ \mid\ r_2 > \sqrt{2} > r_1,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$$

می‌گوییم $\pi(\bar{x}, A)$ یک تایپ جزئی در M است هرگاه $Th(M) \cup \pi(\bar{x}, A)$ سازگار باشد، به بیان دیگر هرگاه

$Th(M) = \{\varphi \mid M \models \varphi\}$

برای هر تعداد متناهی فرمول $\varphi_1(\bar{x},\bar{a}), \dots, \varphi_n(\bar{x},\bar{a}) \in \pi(\bar{x},A)$ تئوری $Th(M) \cup \exists \bar{x}\,(\varphi_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \varphi_n(\bar{x}))$ سازگار باشد. (تمرین) به بیان دیگر برای هر تعداد متناهی فرمول $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_n(\bar{x}) \in \pi(\bar{x},A)$ عنصر $\bar{m} \in M$ موجود باشد به طوری که $M \models \varphi_1(\bar{m}) \wedge \dots \wedge \varphi_n(\bar{m})$.

$\varphi_i(\bar{x},\bar{a})$

تعریف

فرض کنید M یک L-ساختار باشد و $A \subseteq M$ زیرمجموعه.

فرض کنید $p(\bar{x})$ مجموعه‌ای از فرمولها با پارامتر در A باشد.
$(x_1, \dots, x_n)$

می‌نویسیم $p(\bar{x}) \in S_n^M(A)$ و می‌گوییم $p(\bar{x})$ یک تایپ کامل
(یک تایپ) در M، روی A است هرگاه $p(\bar{x})$ یک تایپ جزئی روی A
در M باشد و برای هر L_A-فرمول $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ یا $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})$
یا $\neg\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})$.

یک مثال از تایپ کامل.

M یک L-ساختار

$A \subseteq M$. $a_1, \dots, a_n \in M - A$. $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$

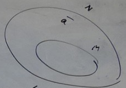
$$tp^M(\bar{a}/A) := \{\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \mid \bar{b} \in A, M \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\}$$

$$tp^M(\bar{a}/\emptyset) = tp^M(\bar{a}) = \{\varphi(\bar{x}) \mid M \models \varphi(\bar{a})\}$$

مثال $M = \mathbb{Q}$.

$$\{r_1 < x < r_2 \mid r_1 < \sqrt{2} < r_2\}$$

یک تایپ جزئی روی $\mathbb{Q}$ با پارامتر در $\mathbb{Q}$ است.



لم

فرض کنید که $p(\bar{x}) \in S_n^M(A)$

یک تایپ کامل باشد. آنگاه یک توسیع مقدماتی

$M \prec N$

و یک عنصر $\bar{a} \in N$ موجودند

به طوری که

$p(\bar{x}) = tp^N(\bar{a}/A)$

$A \subseteq M \prec N$

اثبات

$p(\bar{x}) \in L_A$

توجه کنید که $Diag_{el}(M) \cup p(\bar{x})$

سازگار است. ✓ (بررسی کنید)

ثابت $\bar{c} = c_1, \dots, c_n$ را به زبان L اضافه کنید و دقت کنید که $L_{\bar{c}}$

تئوری $Diag_{el}(M) \cup p(\bar{c})$

در زبان $L(\bar{c})_M$ سازگار است.

فرض کنید $(N, \bar{c}) \models Diag_{el}(M) \cup p(\bar{c})$

پس $\bar{c}^N = a$ یعنی

$p(\bar{x}) = tp(\bar{a}/A)$.

$N \succ M$

$\bar{a} \in N$

$tp^{M}(\bar a) \cup Th(M)$

توجه

مفهوم تایپ یک مفهوم مقدماتی است.

یعنی اگر $M \prec N$ ، $A \subseteq M$ ، $\bar a \in M$

آنگاه $tp^{M}(\bar a/A) = tp^{N}(\bar a/A)$

$$N \models \varphi(\bar a, \bar b) \Leftrightarrow M \models \varphi(\bar a, \bar b)$$

مثال

$Th(\mathbb{N}) \cup \{x > 1, x > 2, \dots\}$

سازگار است.

$\exists M \succ \mathbb{N} \quad \exists t \in M$

$t > n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

توجه

فرض کنید M, N دو L-ساختار باشند، $\bar a \in M$ ، $\bar b \in N$.

آنگاه $tp^{M}(\bar a) = tp^{N}(\bar b)$

$\{\varphi(\bar x) \mid M \models \varphi(\bar a)\}$ $\quad$ $\{\varphi(\bar x) \mid N \models \varphi(\bar b)\}$

هرگاه در $L \cup \{\bar c\}$ ساختار $(M, \bar a)$ ، $(N, \bar b)$ با هم هم‌ارز مقدماتی باشند

$$(M, \bar a) \equiv_{L \cup \{\bar c\}} (N, \bar b)$$

$(\bar c^{M} = \bar a) \qquad (\bar c^{N} = \bar b)$

توجه

اگر T یک تئوری کامل باشد آن گاه

می نویسیم $p(\bar{x}) \in S_n(T)$ هرگاه

برای هر (یک) مدل $M \models T$ عبارت $p(\bar{x}) \cup Th(M)$ سازگار باشد.

به بیان دیگر هرگاه $p(\bar{x}) \cup T$ سازگار باشد.

لم دیاگرام زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathfrak{M}, \bar{a}) & \\
(N_1, \bar{a}) \arrow[ur] & & (N_2, \bar{a}) \arrow[ul] \\
 & (M, \bar{a}) \arrow[ul, "\text{توسیع مقدماتی}"] \arrow[ur, "\text{توسیع مقدماتی}"'] &
\end{tikzcd}$$

$tp^{N_1}(\bar{a})$ ، $tp^{N_2}(\bar{a})$ ، $tp^{M}(\bar{a})$

اثبات

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{M} & \\
N_1 \arrow[ur] & & N_2 \arrow[ul] \\
 & M \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

. ادغام در زبان $L \cup \{c\}$

لم فرض کنید N_1 ، N_2 دو توسیع مقدماتی از M باشند و

$tp^{M}(\bar{a}) = tp^{N_1}(\bar{b}_1) = tp^{N_2}(\bar{b}_2)$

آن گاه یک توسیع مقدماتی هم زمان $\mathfrak{M}$ و یک عنصر $\bar{d} \in \mathfrak{M}$

موجود است به طوری که

$tp^{\mathfrak{M}}(\bar{d}) = tp^{M}(\bar{a}) = tp^{N_1}(\bar{b}_1) = tp^{N_2}(\bar{b}_2)$

مشاهده ساده

فرض کنید M, N دو L-ساختار باشند و $\bar a \in M$, $\bar b \in N$.

فرض کنید یک سامانه رفت و برگشتی از ایزومورفیسم‌های جزئی میان M, N وجود داشته باشد که $\bar a \xmapsto{f} \bar b$ در آن واقع شود.

$M \qquad N$

$\langle \bar a\rangle^M \xrightarrow{f} \langle \bar b\rangle^N$

آنگاه $tp^M(\bar a) = tp^N(\bar b)$

$M \qquad\qquad N$

$\langle \bar a\rangle \xmapsto{f} \langle \bar b\rangle$

$f \in \Gamma$

یک سامانه رفت و برگشتی

$tp^M(\bar a) = tp^N(\bar b)$

اثبات

در این صورت بین دو ساختار $(M,\bar a)$ و $(N,\bar b)$ در زبان $L\cup\{c\}$ یک سامانه رفت و برگشتی وجود دارد. پس $(M,\bar a) \equiv^{L\cup\{c\}} (N,\bar b)$.

و پس $tp^M(\bar a)=tp^N(\bar b)$.

تمرین فرض کنید M , N دو L-ساختار باشند و $\bar{a}\in M$ و $\bar{b}\in N$.

آن‌گاه ثابت کنید که $\langle\bar{a}\rangle^{M}\cong\langle\bar{b}\rangle^{N}$ اگر و تنها اگر برای هر L-فرمول بدون سور $\varphi(\bar{x})$ داشته باشیم $M\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow N\models\varphi(\bar{b})$.

(در این صورت می‌گوییم $f:\bar{a}\to\bar{b}$ یک ایزومرفیسم جزئی است)

نتیجه فرض کنید M, N دو L-ساختار باشند، $\bar{a}\in M$, $\bar{b}\in N$

$(qftp^{M}(\bar{a})=qftp^{N}(\bar{b}))$

$\Uparrow$

فرض کنید برای هر فرمول بدون سور $\varphi(\bar{x})$ بدانیم که $M\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow N\models\varphi(\bar{b})$

$f:\langle\bar{a}\rangle^{M}\to\langle\bar{b}\rangle^{N}$ شامل [illegible] باشد که

همچنین فرض کنید که [illegible] ایزومرفیسم [illegible] باشد. آن‌گاه برای هر فرمول دلخواه $\varphi(\bar{x})$ داریم $M\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow N\models\varphi(\bar{b})$

$(tp^{M}(\bar{a})\to tp^{N}(\bar{b}))$

[illegible]