- جلسه‌ی قبل تئوری ACF_0 معرفی شد.

- $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1) \models ACF_0$

سازگار

- لم: فرض کنید k یک کاردینال ناشمارا باشد آن‌گاه هر دو مدل از ACF_0 با اندازه‌ی k با هم ایزومورف هستند.

$M, N \models ACF_0$

$|M| = |N| = k$

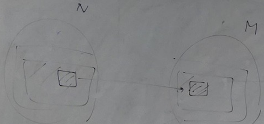
$$M \xrightarrow{f} N$$

$$\mathbb{Q} \underset{f_0}{\cong} \mathbb{Q}$$

$$\lambda < \lambda' \to f_\lambda \subseteq f_{\lambda'}$$

$$(f_\lambda)_{\lambda < k}$$

$= \mathbb{Q}.t(k)$



$$f_k = \bigcup_{\lambda < k} f_\lambda$$

f_0

f_1

f_2

$\vdots$

f_n

f_{n+1}

$\vdots$

$$f_\omega = \bigcup_{n<\omega} f_n$$

$f_{\omega+1}$

$f_{\omega+2}$

$\vdots$

$$f = \bigcup_{\lambda<k} f_\lambda$$

$$|\mathrm{Dom}(f_\lambda)|, |\mathrm{rang}(f_\lambda)| < k$$

$$(f_\lambda)_{\lambda<k}$$

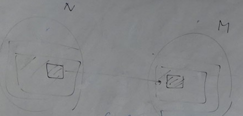
$$M = (m_\lambda)_{\lambda<k}$$

$$N = (n_\lambda)_{\lambda<k}$$

$$m_\lambda \in \mathrm{Dom}(f_{\lambda+1})$$

$$n_\lambda \in \mathrm{Range}(f_{\lambda+1})$$

M N



$x \longrightarrow \boxed{M_1} \overset{f}{\cong} \boxed{N_1} \longleftarrow y$

$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f,g \in M_1[X] \right.$ چندجمله‌ای $\left.\right\} = M_1(X) \cong \underbrace{M_1(x)}_{\text{میدان تولید شده توسط } M_1, x \text{ در } M}$

اگر x روی M_1 متعالی باشد

$\in N - N_1$

ادعا: اگر y یک عنصر دلخواه متعالی روی N_1 باشد آن گاه

$$M_1(X) \cong M_1(x) \cong N_1(y) \cong N_1(X)$$

دنباله $(f_\lambda)_{\lambda<k}$ را به صورت زیر می سازیم.

اگر λ حدی باشد قرار می دهیم $f_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} f_\gamma$

اگر λ تالی باشد مثلاً $\lambda = \gamma+1$ و f_γ ساخته شده باشد.

هدف: اضافه کردن m_γ به دامنه، n_γ به برد.

پروژه استقرای فرامتناهی چیست؟

(فرضیه پیوستار)

اگر x روی M_1 جبری باشد آن گاه عضوی مثل $f(x)\in M_1[x]$ هر چند جمله‌ای است.

$\underbrace{f(x)}_{\text{حداقل درجه}}$

$$M_1(x)\cong \frac{M_1[x]}{\langle f(x)\rangle}$$

روش یافتن y :

$$f(x)\in M_1[x]$$

$$ax^2+bx+c \to a'x^2+b'x+c' \in N_1[x]$$

اگر y ریشه‌ای برای f در N باشد

$$\frac{M_1[x]}{\langle f(x)\rangle}\cong M_1(x)\cong N_1(y)\cong \frac{N_1[x]}{\langle f'(x)\rangle}$$

قضیه ACF_0 یک تئوری کامل است.

اثبات فرض کنید $M, N \models ACF_0$.

ادعا: $M\equiv N$.

λ-رسته‌ای

$|M'|=2^{\aleph_0}$, $|N'|=2^{\aleph_0}$

$M' \succ M$, $N' \succ N$ — لونهایم اسکولم

حالت ۱ M، N هر دو شمارا

$M\equiv M'\equiv N'\equiv N$

$|M'|=|N'|$

$M' \cong N'$

M شمارا، N ناشمارا

$M\equiv M'\equiv N$

خلاصه

ثابت کردیم که ACF_0 یک تئوری سازگار کامل است و $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \models ACF_0$

بنابراین اگر φ یک جمله در زبان $L_r = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ باشد آنگاه $\mathbb{C} \models \varphi$ اگر و تنها اگر در یک (هر) میدان بسته جبری دلخواه باشد.

$$Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, -) \equiv ACF_0$$

$$\mathbb{C} \models ACF_0 \models \varphi \in Th(\mathbb{C})$$

بنابراین ACF_0 یک اصل بندی کامل برای اعداد مختلط است.

توجه با اثباتی کاملاً مشابه می توان نشان داد که ACF_p یک تئوری کامل است.

توجه

بنا به لوونهایم - اسکولم میدانهای بسته جبری

با هر اندازه ی دلخواه نامتناهی وجود دارند.

تعریف: اگر $A \subseteq N$ (میدان بسته جبری) آن گاه A^{alg}، بستار جبری A بنا به تعریف، کوچکترین

میدان بسته جبری شامل A است.

نتیجه

$\mathbb{Q}^{alg}$ شمارا است.

لوونهایم - اسکولم

$$Q \subseteq N' \preceq N$$

N': شمارا و بسته جبری

N: میدان بسته جبری

پیدا کردن یک میدان بسته جبری شامل $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} \subseteq \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle f(x) \rangle} \in$$

$\underbrace{f(x)}_{\text{تحویل ناپذیر}}$

ش‌ها با ادامه این کار، به یک میدان $\mathbb{Q}_1$ می‌رسیم که در آن تمام چندجمله‌ای‌های با ضرایب در $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{Q}_1$ ریشه دارند.

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_1$$

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_1 \subseteq \mathbb{Q}_2 \subseteq \cdots \mathbb{Q}_n \subseteq \mathbb{Q}_{n+1} \subseteq \cdots$$

ادعا: $\bigcup \mathbb{Q}_n$ بسته جبری است.

نتیجه: اگر M یک میدان باشد

$$|M^{alg}| = |M| + \aleph_0$$

قضیه: فرض کنید φ یک جمله در زبان حلقه‌ها باشد. آنگاه موارد زیر با هم معادلند.

1) $\mathbb{C} \models \varphi$

2) φ در یک میدان بسته جبری با مشخصه ۰ درست است.

3) φ در تمام میدان‌های بسته جبری با مشخصه صفر درست است.

④ φ از جایی به بعد در میدانهای بسته جبری

با مشخصه p درست است.

$\exists n\in\mathbb{N} \quad p>n \quad ACF_p \models \varphi$

⑤ φ از جایی به بعد در بسته جبری $\mathbb{F}_p$ درست است.

$\exists n\in\mathbb{N} \quad \forall p>n \quad \mathbb{F}_p^{alg} \models \varphi$

روش اثبات

توجه کنید که برای هر جمله φ داریم $ACF_0 \models \varphi \iff ACF_0 \cup \{\varphi\}$ سازگار باشد.

(به طور کلی: اگر T کامل باشد، $T\cup\{\varphi\}$ سازگار باشد آنگاه $T \models \varphi$) (تمرین ساده)

فرض کنید که جمله φ در $\mathbb{C}$ درست باشد بنابراین $ACF_0 \cup \varphi$ سازگار است.

به برهان خلف فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ عدد $p > n$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathbb{F}_p^{alg} \models \neg\varphi$

$ACF_p \models \neg\varphi$

$n \qquad p$

آن گاه ادعا می‌کنیم $\underbrace{ACF_0 \cup \{\neg\varphi\}}$ سازگار است زیرا هر بخش متناهی از آن سازگار است (با فشردگی حکم نتیجه می‌شود).

اثبات: باید نشان دهیم که هر بخش متناهی از آن سازگار است.

بنابراین $ACF_0 \models \neg\varphi$.

$\Delta \subseteq ACF_0 \cup \neg\varphi$

- میدان بودن
- مشخصه از n بزرگتر بودن
- $\neg\varphi$