تئوری‌های کامل

تئوری T در زبان L را کامل می‌نامیم هرگاه برای هر L-جمله φ داشته باشیم

$$T \models \varphi \quad \text{یا} \quad T \models \neg\varphi$$

تعریف

فرض کنید M یک L-ساختار باشد، $A \subseteq M$ زیرمجموعه. آنگاه L-ساختار تولید شده توسط A به صورت زیر است:

$$\langle A \rangle = \left\{ t(a_1, \dots, a_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} t \text{ یک } L\text{-ترم است،} \\ a_1, \dots, a_n \in A \end{array} \right\}$$

تمرین

نشان دهید که ساختار تولید شده توسط A برابر است با

$$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{M \; L\text{-ساختار} \\ A \subseteq M}} M$$

تعریف

فرض کنید M, N دو L-ساختار باشند،

$A \subseteq M$ زیرمجموعه، $B \subseteq N$ زیرمجموعه. تابع $f: A \to B$

را یک ایزومورفیسم جزئی می‌نامیم هرگاه

① برای هر تابع $F(x_1, \dots, x_n) \in L$ داریم: $a_1, \dots, a_n, b \in A$

$M \models F(a_1, \dots, a_n) = b \iff N \models F(f(a_1), \dots, f(a_n)) = f(b)$

② $f(c^M) = c^N$، $c^M \in A$، $c^N \in B$

③ $M \models R(a_1, \dots, a_n) \iff N \models R(f(a_1), \dots, f(a_n))$

$B \subseteq N$

$A \subseteq M$

تمرین

اگر $f: A \to B$ یک ایزومورفیسم جزئی باشد آنگاه f را می‌توان به طور یکتا به ایزومورفیسمی میان $\langle A \rangle^M$, $\langle B \rangle^N$ گسترش داد.

فرض کنید که M,N دو L-ساختار باشند

تعریف

اگر یک سامانه رفت و برگشتی از ایزومورفیسم های جزئی میان M ، N وجود داشته باشد آنگاه

$$M \equiv N$$

$$\Gamma = \left\{ f: A \to B \;\; \begin{matrix} A \subseteq M \\ B \subseteq N \end{matrix} \right\}$$

$$\forall a \in M \;\; \forall f \in \Gamma \;\; \exists g \in \Gamma \;\; g \supseteq f, \;\; a \in \mathrm{Dom}(g)$$

$$\forall b \in N \;\; \forall f \in \Gamma \;\; \exists g \in \Gamma \;\; g \supseteq f, \;\; b \in \mathrm{range}(g)$$

نتیجه

اگر بین هر دو مدل $M, N \models T$

یک سامانه رفت و برگشتی پیدا شود

T کامل است.

توجه

اگر تئوری T مدل متناهی نداشته باشد

و در یک کاردینال k- جازم باشد آنگاه T کامل است.

k-Categorical

$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$

$x^2+1=0$

i

تئوری میدان‌های بسته جبری

قضیه اساسی جبر

هر چندجمله‌ای در $\mathbb{C}[x]$ تمام ریشه‌هایش در $\mathbb{C}$ قرار دارند.

پروژه اثبات ق‌اس با استفاده از کاملا-تئوری.

$L = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$

ACF تئوری میدان‌های بسته جبری

algebraically closed fields.

$ACF = T_{\text{میدان}} \cup$ بسته جبری بودن

$\Downarrow$

شمای اصول بسته جبری بودن.

$$\varphi_n : \forall a_1, \ldots, a_n \ \exists x \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

توجه: ACF سازگار است، زیرا مدل دارد.

$(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, -) \models ACF$

توجه: با ACF_p تئوری میدان‌های بسته جبری

با مشخصه p را نشان می‌دهیم. $p \in Prime \cup \{0\}$

ACF_0

ACF_p

لم: هر دو مدل ناشمارا از ACF_0 با هم ایزومورف هستند.

(بنابراین برای هر کاردینال ناشمارای κ، تئوری ACF_0 κ-جازم است.)

سوال: آیا ACF_0 یک تئوری $\aleph_0$-جازم است؟ پاسخ: خیر. تمرین

$\mathbb{Q}^{alg}$, $\mathbb{Q}(\pi)^{alg}$

پروژه دوم

متعالی بودن π و e روی $\mathbb{Q}$.

اثبات

فرض کنید k یک کاردینال ناشمارا باشد.

فرض کنید $M, N \models ACF$ ، $|M| = |N| = k$. فرض کنید $M = (m_\lambda)_{\lambda<k}$ ، $N = (n_\lambda)_{\lambda<k}$

هدف: یافتن یک ایزومورفیسم $f: M \to N$

روش: k تا ایزومورفیسم جزئی $(f_\lambda)_{\lambda<k}$ (به صورت زنجیره) می‌سازیم به طوری که

① برای هر λ ، f_λ یک ایزومورفیسم جزئی باشد.

② $|\mathrm{Dom}\, f_\lambda|, |\mathrm{range}\, f_\lambda| < k$

③ $(m_\lambda, n_\lambda) \in f_{\lambda+1}$

در نهایت قرار خواهیم داد:

$$f = \bigcup_{\lambda<k} f_\lambda.$$

توجه

$$Q \subseteq M, N$$

$1 \in M \quad 2, 3, \ldots$

قدم اول استقرا $\quad f_0 : Q \to Q$

قدم تالی

فرض کنید f_λ ساخته شده باشد با شرط‌های داده شده.

هدف: ساختن $f_{\lambda+1}$ به گونه‌ای که $(m_\lambda, n_\lambda) \in f_{\lambda+1}$

انحراف از بحث؟ فرض کنید $M_1 \subseteq M_2$ یک توسیع میدانی باشد.

و فرض کنید $a \in M_2$ عنصری جبری روی M_1 باشد. یعنی a ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب در M_1 است.

برای a یک چندجمله‌ای مینیمال روی M_1 وجود دارد که آن را با f نشان می‌دهیم.

سوال: میدان تولید شده توسط a, M_1 چگونه است: $M_1(a) = ?$

آنگاه $\langle f(x) \rangle$ در $M_1[X]$ ایده‌آل یک ایده‌آل ماکزیمال است. بنابراین $\frac{M_1[X]}{\langle f(x) \rangle}$ یک میدان است.

$$M_1 \hookrightarrow M_1[X]$$

$$M_1(a) \subseteq \frac{M_1[X]}{\langle f(x) \rangle}$$

یادآوری‌های مربوط

اگر M یک حلقه باشد و I یک ایدئال ماکزیمال باشد، آن‌گاه

$$M/I = \{a+I \mid a \in M\}$$

$$\left(a+I = b+I \iff a-b \in I\right)$$

یک میدان است.

اگر $f: M \to N$ یک همریختی بین حلقه‌ای باشد، آن‌گاه

$$\operatorname{Im} f \cong M/\ker f$$

$$\ker f = \{x \mid f(x) = 0_N\}$$

توجه اگر F یک میدان باشد آن‌گاه هر ایدئال اول در $F[x]$ یک ایدئال ماکزیمال است.

$$M \subseteq \frac{M[X]}{\langle f(x) \rangle}$$

ax^2+bx+c

$f(x) \in M[x]$

$f(x) = ax^2+bx+c$

$$\Downarrow$$

$g_1(x), g_2(x)$

$g_1(x) = g_2(x) \iff$

$f \mid g_1 - g_2$

$$\frac{M[x]}{\langle f(x)\rangle} = \{\, g(x)+\langle f(x)\rangle \mid g(x)\in M[x] \,\}$$

$$g_1(x)+\langle f(x)\rangle = g_2(x)+\langle f(x)\rangle$$

$$\Leftrightarrow f \mid g_1 - g_2$$

خلاصه: $M_1 \subseteq M_2$ (توسیع میدان) ، $a \in M_2$ که روی M_1 جبری باشد، $f(x)$ چندجمله‌ای مینیمال a روی M_1 باشد.

$$\underbrace{M_1(a)}_{} \cong \frac{M[x]}{\langle f(x)\rangle}$$

کوچکترین میدان شامل a ، M_1 ، M_2

یادآوری

فرض کنید $M_1 \subseteq M_2$ که توسیع میدان‌ها باشد.

فرض کنید $a \in M_2 - M_1$ که روی M_1 متعالی است (یعنی در هیچ چندجمله‌ای صدق نمی‌کند) ضرایب در M_1

فرض در M_1 متعالی آنگاه

$$M_1(a) \cong M_1(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f,g \in M_2[x] \right\}$$

حالت اول

اگر x روی F_1 جبری باشد:

$$F_1(x) \cong \frac{F_1[X]}{\langle f(x) \rangle} \cong \frac{F_2[X]}{\langle f(x) \rangle}$$

توجه

$f(x)$ روی F_2 نیز تحویل‌ناپذیر است.

حال اگر y ریشه‌ای برای $f(x)$ باشد داریم

$$F_2(y) \cong \frac{F_2[y]}{\langle f(y) \rangle}$$

$x \cdot \quad M \models ACF \qquad N^{ACF} \quad \cdot y$

$$F_1 \cong F_{2_\lambda}$$

$$\underbrace{F_1(x)}_{M} \cong \underbrace{F_2(y)}_{N}$$

تولید شده — میدان تولید شده

$$M = (m_\lambda)_{\lambda \in k}$$

$$N = (n_\lambda)_{\lambda \in k}$$

در گزاره ۳ زیرمیدان‌ها با شمارش با عدد س.

ادامه اثبات

فرض کنید که f_λ ساخته شده است

هدف: ساختن $f_{\lambda+1} \supseteq f_\lambda$ به گونه‌ای که $m_\lambda \in Dom(f_{\lambda+1})$ و $n_\lambda \in range(f_{\lambda+1})$

$$f_\lambda : M_\lambda \to N_\lambda$$

$$f_{\lambda+1} : M_{\lambda+1} \to N_{\lambda+1}$$

$$m_\lambda \mapsto \bigcirc$$

$M, N \models ACF_0$

$f_1 : M_1 \to N_1$

$\subseteq$

$f_2 :$ a

$\subseteq$

$f_3 \to m_2 \in \mathrm{Dom}\, f_3$, $n_2 \in \mathrm{rang}\, f_3$

$\subseteq$

$\vdots$

$f_\omega : \bigcup f_n$

$\downarrow$

$f_{\omega+1}$ m_ω , n_ω

$\vdots$

x M N α

$F_1 \longmapsto F_2$

$F_1(x) \longmapsto F(y)$

حالت دوم

اگر x روی F_1 متعالی باشد:

$F_1(x) \cong F_1(X)$

از آنجا که اندازهٔ F_2 اکیداً کمتر از اندازهٔ N است

عنصر y پیدا می‌شود که روی F_2 متعالی است.

$F_1(x) \cong F_2(y) \cong F_1(X) \cong F_2(y)$