تئوریهای مرتبهٔ اول

تعریف: یک تئوری مرتبهٔ اول مجموعه‌ای از جملات مرتبهٔ اول در زبان $\mathcal{L}$ است.

فشردگی: اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی $T \subseteq \Delta$ دارای یک مدل $\mathfrak{M}_\Delta \models \Delta$
آن گاه یک ساختار $\mathfrak{M}$ موجود است به طوری که $\mathfrak{M} \models T$.

لم: کلاس $\mathbb{K}$ از $\mathcal{L}$-ساختارها دارای یک اصل‌بندی متناهی است
(یعنی یک تئوری متناهی T موجود است به طوری که $\mathbb{K} = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models T\}$)
اگر و تنها اگر $\mathbb{K}$ و $\mathbb{K}^c$ کلاسهای مقدماتی باشند.

اثبات: فرض کنید $\mathbb{K}$، $\mathbb{K}^c$ هر کلاسهای مقدماتی باشند. بنابراین تئوریهای T، T' موجودند به طوری که

$$\mathbb{K} = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models T\}, \quad \mathbb{K}^c = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models T'\}.$$

آن گاه تئوری $T \cup T'$ را در نظر بگیرید

تئوری $T \cup T'$ دارای مدل نیست.

بنابراین مجموعه‌های متناهی $\Delta \subseteq T$, $\Delta' \subseteq T'$

موجودند به طوری که $\Delta \cup \Delta'$ دارای مدل نیست.

$$\Delta = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$$

$$\Delta' = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$$

A

$$K = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n, (\neg\psi_1 \vee \dots \vee \neg\psi_n)\}\}$$

اثبات: اگر $\mathcal{M} \in K$

آن گاه $\mathcal{M} \models T$ پس $\mathcal{M} \models \varphi_i$.

و $\mathcal{M} \models \neg\psi_1 \vee \dots \vee \neg\psi_n$ (زیرا در غیر این صورت $\mathcal{M} \models \Delta \cup \Delta'$)

حال اگر $\mathcal{M} \in A$ آیا $\mathcal{M} \in K$؟

$\mathcal{M} \models \Delta$. اگر $\mathcal{M} \notin K$ آن گاه $\mathcal{M} \in K^c$ بنابراین $\mathcal{M} \models T'$ در

$\mathcal{M} \models \psi_i$.

نتیجه: تئوری میدانهای با مشخصه صفر دارای اصل بندی است.

$$T = T_{\text{میدانها}} \cup \{1+1 \neq 0,\ 1+1+1 \neq 0,\ 1+1+1+1 \neq 0,\ \dots\}$$

$$m \models T$$

اگر m میدان است آنگاه مشخصه m صفر است.

بنابراین کلاس میدانهای با مشخصه صفر دارای اصل بندی است.

سوال: آیا می‌توان یک تئوری متناهی T' نوشت به طوری که T' دقیقاً کلاس میدانهای با مشخصه صفر را بدهد؟

لم: این کار امکان پذیر نیست.

اثبات: اگر کلاس میدانهای با مشخصه صفر دارای اصل بندی متناهی باشد آنگاه متمم این کلاس نیز دارای اصل بندی خواهد بود.

ادعا: در این صورت کلاس میدانهای با مشخصهٔ ۰، صفر نخیر دارای اصل بندی است.

اگر کلاس میدانهای با مشخصهٔ ناصفر دارای اصل بندی باشد T آن گاه

تئوری زیر سازگار است.

$$T_1 = T \cup \{1+1 \neq 0,\ 1+1+1 \neq 0,\ 1+1+1+1 \neq 0, \dots\}$$

هر بخش متناهی از T_1 سازگار است. پس T_1 سازگار است.

اگر $\mathfrak{M} \models T_1$ آن گاه مشخصهٔ $\mathfrak{M}$ صفر است.

تعریف

دو تئوری T ، T' را معادل می‌نامیم و

می‌نویسیم $T \equiv T'$

هرگاه کلاس مدلهای T دقیقاً همان کلاس

مدلهای T' باشد.

تعریف

فرض کنید φ یک L-جمله، T یک L-تئوری باشد.

می‌نویسیم $T \models \varphi$ هرگاه برای هر L-ساختار M

اگر $M \models T$ آنگاه $M \models \varphi$.

لم $T \models \varphi$ اگر و تنها اگر $T \cup \{\neg\varphi\}$ دارای مدل نباشد.

$T \models \varphi$

لم

اگر و تنها اگر یک مجموعه متناهی $\Delta \subseteq T$

موجود باشد به طوری که

$\Delta \models \varphi$

اثبات

اگر $T \models \varphi$ آنگاه $T \cup \{\neg\varphi\}$ مدل

ندارد. آنگاه $\Delta \subseteq T$ متناهی موجود است به طوری

$\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ مدل ندارد. یعنی $\Delta \models \varphi$.

از طرف دیگر اگر $\underset{\text{متناهی}}{\Delta} \subseteq T$

آن گاه $\Delta \models \varphi$ (واضح است)

به طوری

$T \models \varphi$.

توجه اگر $\mathcal{M}$ یک Σ-ساختار باشد و φ یک Σ-جمله باشد آن گاه یا $\mathcal{M} \models \varphi$ یا $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.

سوال

فرض کنید T یک تئوری باشد و φ یک Σ-جمله باشد.

آیا لزوماً $T \models \varphi$ یا $T \models \neg\varphi$؟

خیر. زیرا ممکن است که هم $T \cup \{\varphi\}$ و هم $T \cup \{\neg\varphi\}$

هر دو دارای مدل باشند.

توجه: فرض کنید T یک $\mathcal{L}$-تئوری باشد و $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$. آن‌گاه T را می‌توان $\mathcal{L}'$-تئوری نیز دانست.

Zermelo-Frankle-Choice

یادآوری اکسیوم

فرض کنید ZFC تئوری زرملو-فرانکل-انتخاب برای مجموعه‌ها باشد. می‌شود اثبات کرد که

$ZFC \models$ یک مجموعه‌ی ناشمارا وجود دارد

از طرفی بنا به لوونهایم-اسکولم ZFC دارای یک مدل شمارا است به نام $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M} \models ZFC$

$\mathcal{M} \models$ یک مجموعه‌ی ناشمارا وجود دارد

لم: فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد و $c \notin \mathcal{L}$. آن‌گاه اگر

$$T \models^{\mathcal{L}\cup\{c\}} \varphi(c)$$

آن‌گاه

$$T \models^{\mathcal{L}} \forall x\, \varphi(x)$$

اثبات: فرض کنید $T \models^{\mathcal{L}\cup\{c\}} \varphi(c)$.

فرض کنید $\mathcal{M} \models T$ ($\mathcal{L}$-ساختار). ادعا می‌کنیم

$$\mathcal{M} \models \forall x\, \varphi(x).$$

$m \in M$

برای این منظور فرض کنید $m \in M$ دلخواه باشد. باید نشان دهیم که

$$\mathcal{M} \models^{\mathcal{L}} \varphi(m).$$

$\mathcal{M}$ را به عنوان یک $\mathcal{L}\cup\{c\}$ ساختار در نظر بگیرید.

$$c^{\mathcal{M}} = m$$

حال $\mathcal{M}$ یک مدل برای تئوری T در زبان $\mathcal{L}\cup\{c\}$ است.

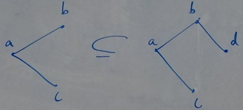
از اینکه $T \models \varphi(c)$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{M} \models \varphi(c^{\mathcal{M}})$

$$\mathcal{M} \models \varphi(m).$$

تعریف

فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو $\mathcal{L}$-ساختار باشند

می‌گوییم $\mathcal{M}$ یک زیرساختار از $\mathcal{N}$ است و می‌نویسیم $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ هرگاه



زیرمجموعه

$M \subseteq N$

صفراً

اولاً برای هر ثابت $c \in \mathcal{L}$

$$c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$$

ثانیاً برای هر تابع $f \in \mathcal{L}$ اگر $m_1, \dots, m_k \in M$

$$f^{\mathcal{N}}(m_1, \dots, m_k) = f^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k).$$

$$\left(f^{\mathcal{N}}\big|_M = f^{\mathcal{M}} \right)$$

ثالثاً برای هر رابطه $R \in \mathcal{L}$ ، $m_1, \dots, m_k \in M$ اگر

$$R^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k) \Leftrightarrow R^{\mathcal{N}}(m_1, \dots, m_k)$$

توجه: فرض کنید T یک L-تئوری باشد و $L \subseteq L'$. آنگاه T را می‌توان L'-تئوری نیز دانست.

تمرین

فرض کنید $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

نشان دهید که برای هر فرمول بدون سور $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ و هر $m_1, \dots, m_k \in M$ داریم

$$\mathcal{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_k) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(m_1, \dots, m_k)$$

مثال

$$(\mathbb{Z}, <) \subseteq (\mathbb{Q}, <)$$

$$\mathbb{Q} \models \exists x \quad x > 1 \wedge x < 2$$

$$\mathbb{Z} \not\models \exists x \quad x > 1 \wedge x < 2$$

تعریف

تئوری T را دارای اصل موضوع عمومی می‌نامیم هرگاه یک تئوری T' موجود باشد به طوری که همه‌ی جملات موجود در T' به صورت $\forall x_1, \dots, x_n \underbrace{\varphi(x_1, \dots, x_n)}_{\text{بدون سور}}$ باشند و $T = T'$.

قضیه

تئوری $\mathbb{T}$ دارای اصل بندی عمومی است اگر و تنها اگر کلاس مدلهای $\mathbb{T}$ تحت زیرساختارها بسته باشد. (یعنی اگر $\mathfrak{N} \models T$ و $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ آنگاه $\mathfrak{M} \models T$)

$$(\mathbb{Z}^*, \times, 1) \subseteq (\mathbb{Q}^*, \times, 1)$$

اثبات

فرض کنید کلاس مدلهای $\mathbb{T}$ تحت زیرساختارها بسته باشد

مجموعه Γ از جملات را به صورت زیر تعریف کنید

$$\Gamma = \{\varphi \mid T \models \varphi,\ \varphi \text{ به صورت عمومی است}\}$$

دارا

ادعا: $\Gamma \equiv \mathbb{T}$

فرض کنید $\mathcal{M} \models \Gamma$.

$\mathcal{M} \models T$.

ادعا

برای اثبات ادعا کافی است نشان دهیم که ساختارِ $\mathcal{N}$ موجود است

به طوری که $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \models T$.

(آن گاه از آنجا که کلاس مدل‌های T' تحت زیرساختار بسته است نتیجه می‌شود که $\mathcal{M} \models T$).

برای هر عنصر $m \in \mathcal{M}$ یک ثابت m به زبان L اضافه کنید و زبان حاصل را زبان L_M بنامید. مجموعه‌ی زیر از جملات L_M را در نظر بگیرید:

$$\mathrm{Diag}_M = \left\{ \varphi(m_1, \dots, m_k) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ یک } L\text{-جمله است و} \\ \varphi \text{ بدون سور است و} \\ \mathcal{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_k) \end{array} \right\}$$

ادعا

$\mathrm{Diag}(M) \cup T$

دارای مدل است. (در زبان L_M).