قضیه فشردگی

فرض کنید T یک مجموعه از جملات مرتبهٔ اول (زبان L) باشد. فرض کنید برای هر $\Delta \subseteq T$ متناهی یک مدل $\mathcal{M}_\Delta \models \Delta$ وجود داشته باشد. آن گاه یک ساختار $\mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models T$.

$$\mathcal{M}_\Delta \models \Delta$$

$$\prod \mathcal{M}_\Delta / \mathcal{U} \models T$$

(L-تعداد)

نتیجه فرض کنید T یک تئوری باشد که دارای مدلهای متناهی به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. آن گاه برای هر کاردینال بی‌نهایت κ، T دارای مدلی با اندازهٔ حداقل κ است.

اثبات

زبان $L' = L \cup \{c_\lambda \mid \lambda < \kappa\}$ را در نظر بگیرید.

L'-تئوری T' را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$T' = T \cup \{c_\lambda \neq c_{\lambda'} \mid \lambda, \lambda' < \kappa\}$$

توجه کنید که اگر تئوری T' دارای مدل باشد، یعنی مثلاً $\mathcal{M}' \models T'$

آن گاه اولاً $\mathcal{M}' \models T$ ثانیاً

$\lambda \neq \lambda' < \kappa$ $\quad c_\lambda^{\mathcal{M}'} \neq c_{\lambda'}^{\mathcal{M}'}$

لذا $|\mathcal{M}'|$ حداقل κ است.

ادعا T' دارای مدل است.

بنا به فشردگی کافی است نشان دهیم که هر بخش متناهی از T' دارای مدل است.

فرض کنید Δ یک زیرمجموعه متناهی دلخواه از T' باشد.

<u>هدف</u>: پیدا کردن یک مدل برای Δ.

توجه کنید که Δ شامل یک زیرمجموعه متناهی از T و یک تعداد متناهی جمله به صورت $c_\lambda \neq c_{\lambda'}$ است.

$$T \cup \{c_\lambda \neq c_{\lambda'}\}_{\lambda, \lambda'}$$

$$\Delta = \Delta' \cup \Delta''$$

ادعا: $T \cup \Delta''$ دارای مدل است.

فرض کنید Δ'' وجود n عنصر متمایز را بیان کند $(c_i)_{i=1,\dots,n}$. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک مدل از T با اندازه بیشتر از n باشد. (L-ساختار) از آنجا که $\mathfrak{M}$ دارای حداقل n عنصر است. (m_i)

برای تبدیل $\mathfrak{M}$ به یک L'-ساختار کافی است تعبیر کنیم $c_i^{\mathfrak{M}} = m_i$

حال $\mathfrak{M}$ یک L'-ساختار است، $\mathfrak{M} \models \Delta'' \cup T$.

۲- تمرین

قضیه (لونهایم - اسکولم - افزایشی)

فرض کنید تئوری T دارای یک مدل نامتناهی باشد. آنگاه برای هر $k \geq |L|$، T دارای یک مدل از سایز دقیقاً k است.

توجه: در اثبات هنکینی قضیه فشردگی سایز مدل به دست آمده دقیقاً برابر با سایز زبان است.

(با استفاده از مفهوم فیلتر منظم می‌توان سایز مدل را به صورت افزایشی کنترل کرد)

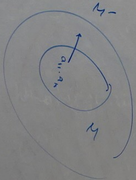
قضیه (لوونهایم - اسکولم افزایشی (قوی)) (L - نامتناهی)

فرض کنید T و $\mathcal{M} \models T$ ، $|\mathcal{M}| = k \geq |L|$.

آنگاه برای هر $k' > k$ یک مدل $\mathcal{M}' \models T$ ، $|\mathcal{M}'| = k'$ داشته باشیم به طوری که برای هر L-فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$

$$\forall m_1, \dots, m_n \in M \quad \mathcal{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n) \Leftrightarrow \mathcal{M}' \models \varphi(m_1, \dots, m_n)$$

$$(\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M})$$



قضیه لوونهایم - اسکولم - کاهشی

L - زبان شمارا

فرض کنید $\mathcal{M} \models T$. $|\mathcal{M}| = k > |L|$

فرض کنید $k' < k$. $|L| \le k'$ آن گاه

$\mathcal{M}' \models T$

به طوری که $|\mathcal{M}'| = k'$ و برای هر $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}'$ و هر فرمول φ

داریم

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{M}' \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

تمرین

- کلاس مجموعه‌های متناهی مقدماتی نیست.
- کلاس گراف‌های همبند

تعریف

تئوری T دارای اصل بندی متناهی است

هرگاه تئوری متناهی T' موجود باشد به طوری که

برای هر L-ساختار $\mathcal{M}$ داشته باشیم

$$\mathcal{M} \models T' \Leftrightarrow \mathcal{M} \models T$$

قضیه

تئوری T دارای اصل بندی متناهی است اگر و تنها اگر $\mathbb{K}$ (کلاس مدلهای T) و $\mathbb{K}^c$ هر دو مقدماتی باشند.

اثبات: فرض کنید $\mathbb{K}$، $\mathbb{K}^c$ هر دو مقدماتی باشند.

$$\mathbb{K} = \{m \mid m \models T\}$$

$$\mathbb{K}^c = \{m \mid m \models T'\}$$

توجه کنید که $T \cup T'$ دارای هیچ مدلی نیست.

بنابراین یک زیر مجموعه متناهی $\Delta \cup \Delta' \subseteq T \cup T'$ موجود است که دارای مدل نیست.

اثبات کنید که

$$\mathbb{K} = \left\{m \;\middle|\; \begin{matrix}\forall\varphi\in\Delta \\ m\models\varphi\end{matrix},\ \begin{matrix}\forall\varphi\in\Delta' \\ m\models\neg\varphi\end{matrix}\right\}$$

$$\mathbb{K}^c = \dots$$

$\mathcal{N}' \models Th(\mathcal{N})$

مثال

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$

مدل‌های نااستاندارد حساب.

قضیه: یک ساختار $\mathcal{N}'$ موجود است به طوری

$(\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}')$ $\quad \mathcal{N}' \equiv \mathcal{N}$

، $\mathcal{N}'$ دارای اعداد طبیعی نااستاندارد است.

$\exists x \in N' \ \forall n \in N \ \ x > n$

اثبات: قرار دهید $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ ،

$T' = Th(\mathcal{N}) \cup \{c > 1, c > 1+1, c > 1+1+1, \dots\}$

مثال

آیا کلاس مجموعه‌های نامتناهی دارای اصل بندی متناهی است؟

خیر، زیرا مکمل آن دارای اصل بندی نیست.

نشان دهید که هر بخش متناهی از T' دارای مدل است

پس T' دارای مدل است.

به عبارت ساده مدلهای ناستانداردی برای

$$^{*}\mathbb{R} = Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$$

وجود دارند.

$$R' \equiv R$$

R': شامل عنصر بی‌نهایت بزرگ

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- فراتوان

فرض کنید M یک ساختار مرتبه اول باشد.

فرض کنید U یک فرافیلتر روی اعداد طبیعی باشد.

$$M_i = M \qquad i \in \mathbb{N}$$

آن گاه $\prod M_i / U$ یک فراتوان از M می‌نامیم.

نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$d : M \to \prod M_i / U$$

$$m \mapsto [m_i]_{i \in \mathbb{N}}$$

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad m_i = m$$

اولاً نگاشت d یک نگاشت مقدماتی است.

یعنی برای هر فرمول φ و هر $m \in M$ داریم:

$$M \models \varphi(m) \Leftrightarrow \prod M_i / U \models \varphi(d(m))$$

$\boxed{\text{تمرین}}$ نگاشت d پوشاست اگر و تنها اگر M متناهی باشد.

P-adic

Hrushovski

$$n_i = n = (\mathbb{N}, -)$$

مدل نااستاندارد حساب:

$$\prod n_i / U \models Th(n)$$

$$x = [0, 1, 2, \ldots\ldots] \in \prod n_i / U$$

$$(x_i) = x > [1] \Leftrightarrow \underbrace{\{ i \mid x_i > 1 \}}_{\text{متمم متناهی}} \in U$$