یادآوری

- کلاس $\mathbb{K}$ از L-ساختارها مقدماتی است اگر و تنها اگر $\mathbb{K}$ تحت فراضرب‌ها و تحت معادل بودن (مقدماتی) بسته باشد.

- فرض کنید $\mathbb{K}$ کلاسی از ساختارهای متناهی باشد به طوری که برای هر عدد $n\in\mathbb{N}$ حداکثر متناهی ساختار با اندازه‌ی n در این کلاس باشد.

$\mathcal{M}\models Th(\mathbb{K})$ نامتناهی است $\Leftrightarrow$

$$\mathcal{M}\models\{\varphi \mid \{i \mid \mathcal{M}_i\models\varphi\}\}$$

متمم متناهی باشد

تمرین: در زبان $L=\{E\}$ تئوری یک $E(x,y)$ رابطه‌ی هم‌ارزی را بنویسید که دارای نامتناهی کلاس نامتناهی باشد. بررسی کنید که این تئوری دارای چند مدل با اندازه‌ی $\aleph_0$، $\aleph_1$، $\aleph_2$ است.

مثال از تئوری‌ها

تئوری میدان‌ها

$$L=\{+,\cdot,0,1\}$$

اصول میدان‌ها:

گروه آبلی

$$\forall x,y,z \quad x+(y+z)=(x+y)+z$$

$$\forall x\,\exists y \quad x+y=0$$

$$\forall x,y \quad x+y=y+x$$

$$\forall x \quad x+0=x$$

ضرب:

$$\forall x,y,z \quad x.(y.z) = (x.y).z$$

$$\forall x \neq 0 \ \exists y \quad x.y = 1$$

$$\forall x,y \quad x.y = y.x$$

$$\forall x \quad x.1 = x$$

- $1 \neq 0$

- $\forall x,y,z \quad x.(y+z) = x.y + x.z$

بنابراین کلاس میدانها یک کلاس مقدماتی است.

سوال: آیا کلاس میدانهای متناهی نیز مقدماتی است؟

اهداف

جبر میدانهای متناهی

مشاهده

اگر F یک میدان متناهی باشد آن گاه مشخصهٔ F متناهی است.

$$\exists n \ \forall x\in F \quad x+x+\cdots+x=0$$

هم چنین مشخصهٔ یک میدان همواره یک عدد اول است. (اثبات کنید)

پس اگر F یک میدان متناهی باشد آن گاه مشخصهٔ F یک عدد اول p است.

فرض کنید F یک میدان متناهی باشد.

نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} F$$

$$\underset{n>0}{n} \longrightarrow \underbrace{1_F+1_F+1_F+\cdots+1_F}_{n \text{ بار}}$$

$$-n \longrightarrow -(\qquad)$$

$$\ker f = p\mathbb{Z}$$

بنابراین

$$\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow F$$

بنابراین هر میدان متناهی از مشخصهٔ p شامل $\mathbb{Z}_p$ است.

$$1_F$$

$$1_F+1_F$$

$$1_F+1_F+1_F$$

تا اینجا گفتیم که $\mathbb{Z}_p \subseteq F$

پس F را می‌توان به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{Z}_p$ در نظر گرفت. (یعنی $ax+by$ که $a,b \in \mathbb{Z}_p$ و $x,y \in F$ متعلق به F هستند)

$$\mathbb{Z}_p \times F \longrightarrow F \quad \text{(ضرب برداری)}$$

$$\underbrace{r}_{\in \mathbb{Z}_p} . x \in F$$

از آنجا که F یک میدان متناهی است

نتیجه F به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{Z}_p$ متناهی است. فرض کنید $\{x_1, \dots, x_n\}$ بردارهای F روی $\mathbb{Z}_p$ باشند.

پس هر عنصری در F به صورت مجموعی به صورت زیر است:

$$\underbrace{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}\qquad a_i \in \mathbb{Z}_p$$

بنابراین (به عنوان فضای برداری)

$\mathbb{Z}_p$ به عنوان فضای برداری روی

$$F \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p}_{n\ \text{بار}}$$

بنابراین اگر F یک میدان متناهی باشد و مشخصه F برابر با p باشد آنگاه $n \in \mathbb{N}$ موجود است

بطوری که

$$|F| = p^n$$

(هر میدان متناهی دارای p^n عضو است)

سوال

آیا برای هر p اول و هر n یک میدان متناهی p^n عضوی موجود است؟

میدان $\mathbb{Z}_p$ را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای $f(x) = x^{p^n} - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ را در نظر بگیرید. این چندجمله‌ای در بستار جبری $\mathbb{Z}_p$ تمام ریشه‌ها خود را دارد. توجه کنید که ریشه‌های این چندجمله‌ای p^n تا متمایز هستند. زیرا

$$f'(x) = p^n x^{p^n - 1} - 1 \neq 0$$

قرار دهید
$$R = \{\text{مجموعه ریشه‌های چندجمله‌ای } f\}$$

$$R \subseteq \mathbb{Z}_p^{alg}$$

ادعا: R یک میدان است. باید ثابت کنیم که:

① $\forall x, y \in R \quad (x-y)^{p^n} = x - y$

② $\forall x, y \in R \quad (x \cdot y^{-1})^{p^n} = x y^{-1}$

توجه

تمرین

$$(x+y)^p = x^p + y^p$$

یعنی

(نشان دهید که ضرایب این چندجمله‌ای بر p بخش‌پذیرند)

$$(x+y)^{p^n} = x^{p^n} + y^{p^n}$$

با استقراء

$$(x+y)^{p^n} = \left((x+y)^{p^{n-1}}\right)^p =$$

بنابراین $\mathbb{Z}_p \leq R$ یک میدان است.

که دارای p^n عضو است.

(میدان شکافنده‌ی چندجمله‌ای $x^{p^n} - x$ روی $\mathbb{Z}_p[x]$)

در واقع برای هر p^n تنها یک میدان با اندازه‌ی p^n موجود است.

توجه: میدان متناهی p^n عضوی را با $\mathbb{F}_{p^n}$ نشان می‌دهیم.

سوال: آیا کلاس میدان‌های متناهی، مقدماتی است.

$\mathbb{K} =$ کلاس میدان‌های متناهی

سوال: آیا این کلاس تحت فراضرب بسته است؟

فرض کنید که U یک فرافیلتر غیراصلی روی p^n ها باشد.

$$\prod \mathbb{F}_{p^n} / U = M$$

سوال: آیا M متناهی است.

$$\varphi_n : \exists x_1 \dots x_n \bigwedge_{i \neq j \in \{1,\dots,n\}} x_i \neq x_j$$

ادعا: $\forall n \in \mathbb{N} \quad M \models \varphi_n$

اثبات: $\{F \mid F \models \varphi_n\}$ متناهی است و نیز U غیراصلی است.

توجه: M دارای ویژگی‌های زیر است.

① اگر جمله φ در تمام میدان‌های متناهی درست باشد $M \models \varphi$

② M میدان است

③ M نامتناهی است

در جبر مقدماتی به نام میدان‌های شبه متناهی وجود دارد.

میدان‌های شبه متناهی هم ارز مقدماتی فرم‌هایی از میدان‌های متناهی.

~~فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد~~

با تئوری‌ها و مدل‌ها تئوری آشنا شدیم. فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد.

قضیه (فشردگی) فرض کنید T یک مجموعه از جمله‌های مرتبه اول باشد.

فرض کنید برای هر $\underset{\text{متناهی}}{\Delta} \subseteq T$ یک مدل $M_\Delta \models \Delta$ وجود داشته باشد.

آن گاه یک L-ساختار M موجود است به طوری که $M \models T$

اثبات

$I = \{\Delta \mid \Delta \subseteq T\}$ (Δ متناهی) قرار دهید

برای هر $\varphi \in T$ مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$X_\varphi = \{\Delta \in I \mid \varphi \in \Delta\}$$

$$D = \{X \subseteq I \mid \exists \varphi \quad X_\varphi \subseteq X\}$$

سوال آیا D فیلتر روی I است؟

توجه (بررسی کنید که D لزوماً فیلتر نیست)

ادعا D دارای ویژگی اشتراک متناهی ناتهی است)

(یعنی برای هر $X_1,\dots,X_n \in D$ داریم $X_1 \cap \dots \cap X_n \neq \emptyset$

$X_1 \in D$ $\quad X_1 \supseteq X_\varphi$ $\quad X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$

$X_2 \in D$ $\quad X_2 \supseteq X_\psi$ $\quad \{\varphi,\psi\} \in X_1 \cap X_2$

یادآوری

اگر $D \subseteq P(I)$ دارای ویژگی اشتراک متناهی ناتهی باشد

آنگاه $\exists U \supseteq D$ فرافیلتر

ادامه اثبات

ادعا می‌کنیم که

$m = \prod m_\Delta / U \models T$

فرض کنید $\varphi \in T$

ادعا می‌کنیم $m \models \varphi$

طبق قضیه لوش کافیست که $m \models \varphi$

$\{\Delta \mid m_\Delta \models \varphi\} \in U$

داریم $\underbrace{\{\Delta \mid \varphi \in \Delta\}}_{= X_\varphi} \subseteq \underbrace{\{\Delta \mid m_\Delta \models \varphi\}}_{} \in U$ ✓