یادآوری

اگر L یک زبان مرتبه اول باشد
منظور از یک L-تئوری مجموعه‌ای از
L-جملات است.

سوال تئوری گروه‌های آبلی دارای تاب را بنویسید.

تعریف گروه G تابدار است

$$\exists x \in G \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{x+x+\dots+x}_{n\ \text{بار}} = 0$$

تلاش برای نوشتن یک تئوری برای گروه‌های آبلی

گروه:

$$\begin{cases} \forall x,y,z \ \ x+(y+z)=(x+y)+z \\ \forall x \exists y \ \ x+y=0 \\ \forall x,y \ \ x+y=y+x \\ \forall x \ \ x+0=x \end{cases}$$

$\exists x \ \ x=0$

$\exists x \ \ x+x=0$

$\exists x \ \ x+x+x=0$

$\vdots$

توجه

در فرمول‌های مرتبه اول سورها $\exists x$ / $\forall x$

به معنی وجود داشتن (یا برای هر) عضوی در جهان است.

$\exists x \in \dots$

تعریف: فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد.

کلاس $\mathbb{K}$ از L-ساختارها را مقدماتی می‌نامیم (Elementary class)

هرگاه یک L-تئوری T وجود داشته باشد به طوری که

$$\mathbb{K} = \{ \mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models T \}$$

مثال: کلاس گروه‌های آبلی

مثال: کلاس مجموعه‌های نامتناهی در زبان تهی. $L = \{\}$

$$T = \{ \exists x_1, x_2 \; x_1 \neq x_2 , \; \exists x_1, x_2, x_3 \; x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_3 , \; \exists x_1, x_2, \ldots x_n , \ldots \}$$

توجه: اگر $\mathcal{M} \models T$ آن گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، n عضو متمایز از $\mathcal{M}$ وجود دارد.

$$\mathbb{K} = \{M_i\}_{i \in I}$$

یادآوری

فرض کنید $\mathbb{K}$ کلاسی از L-ساختارها باشد. قرار دهید

$$T = \{ \varphi \mid \forall M \in \mathbb{K} \quad M \models \varphi \}$$

آنگاه $M \models T$ اگر و تنها اگر

$$\left(M_1 \equiv M_2 \Leftrightarrow \forall \varphi \quad M_1 \models \varphi \rightarrow M_2 \models \varphi \right)$$

$$M \equiv \prod M_i / U$$

شرط اصل

$$\left\{ \forall x \quad \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ بار}} \neq 0 \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

مثال: آیا کلاس مجموعه‌های متناهی، مقدماتی است؟

مثال: تئوری گروه‌های آبلی بدون تاب

گروه آبلی $\left\{ \begin{array}{l} \vdots \end{array} \right.$

$\forall x \quad (x \neq 0 \rightarrow x + x \neq 0)$

$\forall x \quad (x \neq 0 \rightarrow x + x + x \neq 0)$

$\forall x \quad (x \neq 0 \rightarrow x + x + x + x \neq 0)$

$\vdots$

نتیجه

کلاس K از L-ساختارها مقدماتی است اگر و تنها اگر تحت فراضرب و تحت معادل بودن مقدماتی بسته باشد.

$\Leftarrow$

$M \in K \quad \forall N \equiv M \quad N \in K$

اثبات

فرض کنید K یک کلاس مقدماتی باشد. ($K = \{M \mid M \models T\}$)

- فرض کنید $M \in K$. اگر $N \equiv M$ آنگاه $N \models T$

پس $N \in K$.

- فرض کنید $\prod M_i / U$ فراضربی از ساختارهای موجود در K باشد.

ادعا: $\prod M_i / U \models T$.

برای هر $\varphi \in T$ ادعا می‌کنیم که $\prod M_i / U \models \varphi$

برای $\varphi \in T$ داریم

$$\{i \mid m_i \models \varphi\} = I \in U$$

پس (بنا بر لوش)

$$\prod m_i / U \models \varphi$$

بنابراین

$$\prod m_i / U \models T$$

اثبات جهت عکس

فرض: کلاس $\mathbb{K}$ تحت معادل بودن مقدماتی و فراضرب بسته است.

هدف: پیدا کردن تئوری T به طوری که

$$\mathbb{K} = \{m \mid m \models T\}$$

$$\mathbb{K} = \{m_i\}_{i \in I}$$

قرار دهید

$$T = \bigcap_{m \in \mathbb{K}} Th(m)$$

ادعا:

$$\mathbb{K} = \{m \mid m \models T\}.$$

اولاً اگر $m \in \mathbb{K}$ آنگاه $m \models T$

ثانیاً اگر $m \models T$ آنگاه بنابر قبل

$$m \equiv \prod m_i / U \in \mathbb{K}$$

داریم $\prod \mathcal{M}_i / U \in \mathbb{K}$ (چون کلاس تحت فراضرب بسته است)

$\mathcal{M} \in \mathbb{K}$ چون کلاس تحت معادل بودن مقدماتی بسته است.

قضیه فرض کنید $\mathbb{K}$ کلاسی از $\mathcal{L}$-ساختارهای متناهی باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی n در کلاس $\mathbb{K}$ تعداد متناهی ساختار از اندازه‌ی n موجود باشد، آن‌گاه $\mathcal{M}$ یک مدل نامتناهی برای $Th(\mathbb{K})$ است اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ مدلی از تئوری زیر باشد:

$$T = \{ \varphi \mid \text{تعداد مدل‌هایی در } \mathbb{K} \text{ که در آن‌ها } \varphi \text{ درست نیست متناهی باشد} \}$$

$$= \{ \varphi \mid |\{ \mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \neg\varphi \}| < \infty \}$$

متناهی

(به بیان دیگر: کلاس مدل‌های نامتناهی $Th(\mathbb{K})$ خودش یک کلاس مقدماتی است)

اثبات

فرض کنید M یک مدل نامتناهی برای $Th(K)$ باشد. از آنجایی که M مدلی برای $Th(K)$ است نتیجه می‌شود $\exists U$ فرافیلتر

$$M \equiv \prod M_i / U$$

ادعا: $M \models T$.

فرض کنید $\varphi \in T$. ادعا: $M \models \varphi$.

برای اثبات ادعا کافی است نشان دهیم که

$$\{ i \mid M_i \models \varphi \} \in U$$

در واقع باید نشان دهیم که فرافیلتر U شامل فرشه است.

(یادآوری: هر فرافیلتر غیراصلی شامل فرشه است)

یادآوری: فرافیلتر U اصلی است هرگاه $a \in I$ وجود داشته باشد به طوری که

$$U = \{ X \subseteq I \mid a \in X \}$$

یادآوری: U غیراصلی است $\Leftrightarrow$ شامل هیچ مجموعه متناهی نباشد. (تمرین)

باید نشان دهیم که فیلتر U اصلی نیست.

اگر فیلتر U اصلی باشد آنگاه $\exists i \in I \;\; \{i\} \in U$

فرض کنید $|m_i| = n$.

φ: (دقیقاً n عنصر وجود دارد) $\exists x_1 \dots x_n \; \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i,j \in \{1..n\}}} x_i \neq x_j \wedge \forall y \bigvee_{i \in \{1..n\}} y = x_i$

نتیجه: در کدام مدل‌ها φ درست است؟ $\underbrace{\{j \mid m_j \models \varphi\}}_{\downarrow} \supseteq \{i\} \in U$

$\{j \mid m_j \models \varphi\} \in U$

پس حکم φ در $\mathcal{M}$ درست است

و این نامتناهی بودن $\mathcal{M}$ را نقض می‌کند.

اثبات جهت عکس

$T = \{\varphi \mid \varphi$ در تقریباً همه مدل‌ها درست است$\}$

فرض کنید $\mathcal{M} \models T$

هدف $\mathcal{M} \models Th(\mathbb{K})$.

اثبات: این که

فرض کنید $\varphi \in Th(\mathbb{K})$. بنابراین

$\{i \mid m_i \models \varphi\} = I$

هدف: $\mathcal{M} \models \varphi$.

(۱) با استفاده از تعاریف مدل فوق‌ضربی. ✓

$\mathcal{M} \models Th(\mathbb{K})$

ادعا: $\mathcal{M}$ نامتناهی است.

قرار دهید: $\varphi_n : \exists x_1,\dots,x_n \bigwedge_{i\neq j \in \{1,\dots,n\}} x_i \neq x_j$

ادعا می‌کنیم که تمام φ_nها در $\mathcal{M}$ درست هستند.

اثبات: هر φ_n تنها در تعداد متناهی مدل غلط است.