قضیهٔ واش

$$\prod M_i/\mathcal{U} \models \varphi([a_i^1], \ldots, [a_i^n])$$

$$\Leftrightarrow \{ i \mid M_i \models \varphi(a_i^1, \ldots, a_i^n) \} \in \mathcal{U}$$

تعریف

فرض کنید M_1, M_2 دو L-ساختار باشند

می‌گوییم M_1, M_2 هم‌ارز مقدماتی هستند و می‌نویسیم

$M_1 \equiv M_2$ هرگاه برای هر L-جمله‌ی φ (بدون پارامتر)

داشته باشیم $M_1 \models \varphi \Leftrightarrow M_2 \models \varphi$

مثال $L = \{+, 0\}$

تابع ثابت

نشان دهید که $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

مشاهده: در $\mathbb{Z}$ هر عددی یا زوج است یا فرد.

$$\mathbb{Z} \models \forall x \left(\exists y \left(y+y=x \vee x=y+y+1 \right) \right)$$

پارامتر! مشکل دارد.

مثال

$(\mathbb{Z}_2,+,0) \stackrel{?}{\equiv} (\mathbb{Z}_3,+,0)$

ادامه

$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \not\models \varphi$

$(1,0)\,,\,(0,1)$

$$\underbrace{(1,0)}_{\text{زوج نیست}} + \underbrace{(0,1)}_{\text{زوج نیست}} = \underbrace{(1,1)}_{\text{زوج نیست}}$$

$L=\{+,\cdot,0,1\}$

مثال

$\mathbb{C}=(\mathbb{C},+,\cdot,0,1) \not\equiv_{R} (\mathbb{R},+,\cdot,0,1)$

$\mathbb{C} \models \exists x \quad x^2+1=0$

$\mathbb{R} \not\models \exists x \quad x^2+1=0$

سوال

آیا یک فرمول $\varphi(x)$ بدون پارامتر در زبان L پیدا می‌شود به طوری که

$(\mathbb{Z},+,0) \models x=1 \leftrightarrow \varphi(x)$

$\{1\}=\{x \mid \varphi(x)\}$

مشاهده

در $\mathbb{Z}$ مجموع دو عدد فرد، زوج می‌شود.

$\mathbb{Z} \models \forall x,y \left(\nexists K \; x=K+K \wedge \nexists K \; y=K+K \rightarrow \exists K \; x+y=K+K \right)$

جمله در زبان L

φ

تعریف

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک L-ساختار باشد.

تئوری کامل $\mathcal{M}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Th(\mathcal{M}) = \left\{ \varphi \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ یک L-جمله است، } \\ \mathcal{M} \models \varphi \end{array} \right\}$$

توجه: برای هر L-جمله φ یا $\varphi \in Th(\mathcal{M})$ یا $\neg\varphi \in Th(\mathcal{M})$.

توجه

اگر $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ هم ارز مقدماتی باشند

هر جمله‌ای که در $\mathcal{M}$ درست باشد، در $\mathcal{N}$ هم درست است.

یعنی برای $\varphi \in Th(\mathcal{M})$ داریم $\mathcal{N} \models \varphi$.

یعنی $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.

این گونه هم می‌نویسیم $\mathcal{N} \models Th(\mathcal{M})$ $(\mathcal{M} \models Th(\mathcal{N}))$

(جمع نامتناهی)

تعمیم

فرض کنید $\mathbb{K} = \{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ کلاسی از L-ساختارها باشد. تعریف کنید

$$Th(\mathbb{K}) = \bigcap_{i \in I} Th(\mathcal{M}_i)$$

به بیان دیگر

$$\varphi \in Th(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \forall i \in I \;\; \mathcal{M}_i \models \varphi.$$

آن گاه

$$\mathfrak{m} \models Th(\mathbb{K})$$

اگر و تنها اگر $\mathfrak{m}$ با فراضربی از ساختارهای موجود در $\mathbb{K}$ هم ارز مقدماتی باشد؛ به بیان دیگر $\mathfrak{m} \models Th(\mathbb{K})$

اگر و تنها اگر یک فرافیلتر U روی I وجود داشته باشد به طوری که

$$\prod m_i / U \equiv \mathfrak{m}$$

اثبات

فرض کنید $\mathfrak{m} \models Th(\mathbb{K})$

هدف: پیدا کردن فرافیلتر U به طوری که

$$\mathfrak{m} \equiv \prod m_i / U$$

قرار دهید

$$T = Th(\mathfrak{m}) = \{\varphi \mid \mathfrak{m} \models \varphi\}$$

برای هر $\varphi \in T$ قرار دهید

$$X_\varphi = \{i \in I \mid m_i \models \varphi\}$$

قرار دهید

$$U = \{X \subseteq I \mid \exists \varphi \; X_\varphi \subseteq X\}$$

ادعا: U یک فیلتر روی I است.

اثبات: اولاً $U \ni I$. باید ثابت کنیم که

$\exists \varphi \in T \quad I \supseteq X_\varphi$

کافی است $\varphi \in Th(\mathbb{K})$ در نظر گرفته شود.

ثانیاً $\emptyset \notin U$.

باید ثابت کنیم که تهی شامل هیچ X_φ نیست. یعنی باید نشان دهیم هیچ X_φ تهی نیست.

فرض کنید $\varphi \in T$. فرض کنید که φ در تمام m_i ها غلط باشد.

پس در تمام m_i ها نقیض φ درست است.

$\forall i \in I \quad m_i \models \neg\varphi$

پس $\neg\varphi \in Th(\mathbb{K})$ و $\{\varphi, \neg\varphi \in T$

ثالثاً

فرض کنید $X, Y \subseteq U$.

آنگاه که

$\exists \varphi \in T \quad X_\varphi \subseteq X$

$\exists \psi \in T \quad X_\psi \subseteq Y$

پس

$\underbrace{X_{\varphi\wedge\psi}}_{\{i \mid m_i \models \varphi\wedge\psi\} = X_\varphi \cap X_\psi} \subseteq X \cap Y$

رابعاً:

فرض کنید $X \in U$ و $X \subseteq Y$.

$\exists \varphi \quad X_\varphi \subseteq X$

پس $X_\varphi \subseteq Y$

نتیجه این U یک فیلتر روی I است.

U را به یک فرافیلتر به نام U گسترش دهیم.

ادعا

$$m \equiv \prod m_i / U$$

(یادآوری $m \models Th(\mathbb{K})$)

اثبات: فرض کنید φ جمله باشد به طوری که $m \models \varphi$. نتیجه $\varphi \in Th(m) = T$

پس $X_\varphi \in U$ بنابراین $\prod m_i / U \models \varphi$ (بنابه قضیه لوش)

نتیجه: تا اینجا ثابت کردیم که اگر $\mathbb{K} = (m_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از ساختارها باشند آنگاه اگر $m \models Th(\mathbb{K})$ آنگاه m هم‌ارز مقدماتی با یک فراضرب از ساختارهای موجود در $\mathbb{K}$ است.

اثبات قسمت عکس قضیه

فرض کنید $\mathcal{M} \equiv \prod \mathcal{M}_i / \mathcal{U}$

$\forall \varphi \in Th(\mathbb{K}) \quad \mathcal{M} \models \varphi.$

ادعا

اگر $\varphi \in Th(\mathbb{K})$ آنگاه $\{i \mid \mathcal{M}_i \models \varphi\} = I \in \mathcal{U}$

پس بنابر قضیه لوش

$\prod \mathcal{M}_i / \mathcal{U} \models \varphi$

پس $\mathcal{M} \models \varphi$

ل-ساختار

$Th(\mathcal{M})$

$Th(\mathbb{K}) = \bigcap_{\mathcal{M} \in \mathbb{K}} Th(\mathcal{M})$

کلاس ل-ساختارها

تعریف فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد.

هر مجموعه از $\mathcal{L}$-جمله‌ها یک تئوری گفته می‌شود.

(متناهی - نامتناهی)

مثال $\mathcal{L} = \{+, 0, 1\}$

$$T = \{ \forall x \exists y\ x+y=1,\ \neg(\forall x \exists y\ x+y=1) \}$$

مثال $\mathcal{L} = \{\underset{\text{ضرب}}{\cdot}, \underset{\text{ثابت}}{e}\}$

تئوری گروه‌های آبلی

$$T_{group} = \{ \forall x,y,z\ x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z,\ \forall x,y\ x\cdot y = y\cdot x,\ \forall x \exists y\ x\cdot y = e,\ \forall x\ x\cdot e = x \}$$

<u>مثال</u> $\mathcal{L} = \{<\}$

تئوری زیر را تئوری مجموعه‌های مرتب جزئی اکید نامند.

$$T = \{\forall x \; \neg(x<x), \; \forall x,y,z \; (x<y \wedge y<z \to x<z)\}$$

<u>مثال</u> $\mathcal{L} = \{R(x,y)\}$ تئوری گرافهای غیرجهت‌دار

$$T = \{\forall x \; \neg R(x,x), \; \forall x,y \; R(x,y) \to R(y,x)\}$$

$$x \overset{R(x,y)}{\text{———}} y$$

<u>مثال</u>

<u>تعریف</u> گروه $(G,+,0)$ را تابدار می‌گوییم هرگاه یک عضو $g \in G$ و یک $n \in \mathbb{N}$ موجود باشند

$$\underbrace{g+g+g+\dots+g}_{n \text{ بار}} = 0$$

<u>تمرین</u> تئوری گروه‌های آبلی تابدار را بنویسید.