$\mathfrak{M} = (M, f, R, c)$

I مجموعه است

- فیلتر و فرافیلتر

$D \subseteq P(I)$ $\quad D \subseteq U$

جلسه اول

- ساختارهای منطق مرتبه اول

جلسه دوم

$(\mathbb{Z}, +, \cdot, \le, 0, 1)$

$(G, \times, o^{-1})$

جلسه سوم

(فرافیلترها و ساختارها)

تعریف

فرض کنید $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از ساختارها باشد.

همچنین فرض کنید که $U \subseteq P(I)$ یک فرافیلتر روی I باشد.

ساختار $\mathbb{M} = \prod \mathfrak{M}_i / U$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

جهان $\mathbb{M}$ $= \{ (a_i)_{i \in I} \mid a_i \in M_i \} = \prod \mathfrak{M}_i$

رابطه تساوی

$(a_i)_{i \in I} = (b_i) \iff \{ i \mid \mathfrak{M}_i \models a_i = b_i \} \in U$

تمامی توابع، ثابت‌ها و روابط زبان L در ساختار $\prod \mathfrak{M}_i / U$ قابل تعریف هستند.

قضیه واش ($Ło\acute{s}$)

فرض کنید $\prod m_i / U$ یک فراضرب از ساختارهای L- $(m_i)_{i\in I}$ باشد.

همچنین فرض کنید که $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ یک L-فرمول باشد. آنگاه

$$\prod m_i / U \models \varphi\left([a_i^1],\dots,[a_i^n]\right) \Leftrightarrow \{i \mid m_i \models \varphi(a_i^1,\dots,a_i^n)\}\in U.$$

$f(x_1,\dots,x_n)\in L$

$\mathbb{M}$

$$f\left([a_i^1],[a_i^2],\dots,[a_i^n]\right) = [b_i]$$

$$\Leftrightarrow \{i \mid m_i \models f(a_i^1,\dots,a_i^n)=b_i\}\in U$$

به همین ترتیب روابط را تعریف کردیم.

اثبات قضیه

یادآوری: مجموعه‌ی L-فرمولها به صورت استقرایی زیر حاصل می‌شود:

- اگر t_1، t_2 ترم باشند $t_1(x_1,\dots,x_n)=t_2(x_1,\dots,x_n)$ فرمول است.
- اگر R یک رابطه باشد $R(\underbrace{t_1(x_1,\dots,x_n)}_{\text{ترم}},\dots,t_n(x_1,\dots,x_n))$ فرمول است.
- اگر φ_1، φ_2 فرمول باشند $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ فرمول است. $\neg\varphi$
- اگر $\varphi(x)$ یک فرمول باشد $\exists x\, \varphi(x)$ یک فرمول است.

قضیه‌ی واش را با استقرا روی ساخت فرمولها ثابت می‌کنیم.

$$M=\prod m_i/U \models t([a_i])=[b_i]$$

$$\Leftrightarrow \{i \mid m_i \models t(a_i)=b_i\}\in U$$

اثبات

فرض کنیم که t یک ثابت c باشد

$$t([a_i])=c^{M}=[c^{m_i}]_{i\in I}=[b_i]$$

$$\Leftrightarrow \{i \mid c^{m_i}=b_i\}\in U$$

برای متغیرها (تمرین)

فرض کنید که $s = f(t)$ حکم برای t برقرار است یعنی

$$\mathbb{M} \models t([a_i]) = [b_i]$$

$$\iff \{ i \mid m_i \models t(a_i) = b_i \} \in U$$

$$s^{\mathbb{M}}([a_i]) = f^{\mathbb{M}}(t^{\mathbb{M}}([a_i])) = f^{\mathbb{M}}([t^{m_i}(a_i)]) =$$

$$t^{\mathbb{M}}([a_i]) = [t^{m_i}(a_i)] \checkmark$$

بنابر فرض استقرا

$$[b_i]$$

$$\Updownarrow$$

$$\{ i \mid \text{—} \} \in U$$

بیان دیگر لم بالا

$$t^{\mathbb{M}}([a_i]) = (t^{m_i}([a_i]))$$

از لم نتیجه می‌شود که حکم تساوی برای ترم‌ها به صورت $t_1 = t$ برقرار است.

$$t_1^{\mathbb{M}}([a_i]) = t_2^{\mathbb{M}}([a_i]) \iff [t_1^{m_i}(a_i)] = [t_2^{m_i}(a_i)] \iff$$

$$\{ i \mid t_1^{m_i}(a_i) = t_2^{m_i}(a_i) \} \in U$$

فرض کنید که حکم قضیه واش برای فرمول‌های φ_1, φ_2 درست باشد.

$$\mathbb{M} \models \varphi_1([a_i]) \Leftrightarrow$$

$$\{i \mid \mathcal{M}_i \models \varphi_1(a_i)\} \in U$$

$$\mathbb{M} \models \varphi_2(\quad) \Leftrightarrow \_\_\_\_ .$$

طبق تعریف

$$\mathbb{M} \models \varphi_1([a_i]) \wedge \varphi_2([a_i])$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbb{M} \models \varphi_1([a_i]) \ , \ \mathbb{M} \models \varphi_2([a_i])$$

$$\{i \mid \mathcal{M}_i \models \varphi_1 \wedge \varphi_2([a_i])\} = \{i \mid \mathcal{M}_i \models \varphi_1([a_i]) \wedge \varphi_2([a_i])\}$$

$$= \underbrace{\{i \mid \mathcal{M}_i \models \varphi_1([a_i])\}}_{\in U} \cap \underbrace{\{i \mid \mathcal{M}_i \models \varphi_2([a_i])\}}_{\in U} \in U$$

$m_i \models \exists x\, \varphi(x)$

$\Uparrow$

$\{ i \mid m_i \models \varphi(b_i) \} \in U$

$\{ i \mid m_i \models \exists x\, \varphi(x) \} \supseteq \underbrace{\overbrace{\{ i \mid m_i \models \varphi(b_i) \}}^{\text{فرض}}}_{\in U}$

بنا به تعریف فیلتر مجموعه بزرگتر هم در U است.

تمرین نقیض به عهده شما.

حال (⇐):

$\mathbb{M} \models \exists x\, \varphi(x)$

هرگاه عنصر $[b_i]$ موجود باشد به طوری که

$\mathbb{M} \models \varphi([b_i])$

بنا به فرض استقراء

هرگاه $\mathbb{M} \models \varphi([b_i])$

$$\Leftrightarrow \{i \mid m_i \models \neg\varphi(a_i)\} \in \mathcal{U}$$

فرض کنید که حکم برای فرمول φ درست باشد:

$$M \models \neg\varphi([a_i]) \Leftrightarrow$$

$$M \not\models \varphi([a_i]) \underset{\text{فرض استقرا}}{\Leftrightarrow}$$

$$\{i \mid m_i \models \varphi(a_i)\} \notin \mathcal{U} \Leftrightarrow$$

$$\{i \mid m_i \not\models \varphi(a_i)\} \in \mathcal{U}$$

تعریف: دو L-ساختار M، N را هم‌ارز مقدماتی می‌خوانیم و می‌نویسیم (Elementary equivalent)

$M \equiv N$ هرگاه برای هر L-جمله φ داشته باشیم
بدون پارامتر

$$M \models \varphi \Leftrightarrow N \models \varphi$$

<u>مثال</u> $\mathcal{L} =$ زبان حلقه‌ها

$$(\mathbb{F}_p, +, \cdot, \bar{0}, \bar{1}) \equiv (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$$

π

p اول

$$\varphi: \forall x \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p \text{ بار}} = \bar{0} \qquad \mathbb{R} \not\models \varphi$$

<u>مثال</u> $\mathcal{L} = \{<\}$

$$(\mathbb{Z}, \leq) \not\equiv (\mathbb{Q}, \leq)$$

$$(\mathbb{Q}, \leq) \models \forall x, y \; \exists z \quad x < z < y$$

$$(\mathbb{Z}, \leq) \not\models \forall x, y \; \exists z \quad x < z < y$$