- **نظریهٔ مدل**: دانش مطالعه ساختارهای مرتبهٔ اول ریاضی است.

مثال

$$(\mathbb{Z}, +)$$

یک ساختار

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

در اینجا زبان ما

زبان: $\mathcal{L} = \{\underbrace{+}_{\text{علامت تابع}}\}$ است.

به عنوان مثال برای یک ساختار دیگر

ساختار زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \cdot)$$

$$\mathcal{Z}$$

$$+ = \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

مدل

$$(\mathbb{R}, +)$$

$$(\mathbb{N}, +)$$

$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +)$$

$$+\big((x, y), (x', y')\big) = (x + x', y + y')$$

$\mathcal{L} = \{+, 0\}$

یک جمله مثال بزنید که

مثال

$(\mathbb{Z}, +, 0) \models \varphi$

$(\mathbb{Z}, +, 0) \models \forall x \, \exists y \quad x + y = 0$

$(\mathbb{Z}, +, 0) \not\models \exists x \, \exists y_1, y_2 \, (y_1 \neq y_2 \wedge x + y_1 = 0 \wedge x + y_2 = 0)$

مثال

$(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$

ترم‌ها: ترکیب متناهی توابع موجود در ساختارها هستند به کمک متغیرها و ثابت‌ها.

$t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \cdot x_3$

مثال

$(\mathbb{R}, \leq)$

$\mathcal{L} = \{\leq\}$

$(\mathbb{Q}, \leq)$

$(\mathbb{N}, \leq)$

$\mathbb{M} = \prod M_i / U$

هدف: تعریف ساختار

$\mathbb{M} = ($ جهان , تعبیر نمادها $)$

مجموعه $\prod M_i = \{ (a_i)_{i\in I} \mid a_i \in M_i \}$ را در نظر بگیرید

$\prod M_i = \{ f : I \to \bigcup M_i \mid f(i) \in M_i \}$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$\varprojlim \mathbb{F}_p$

تعریف: فرض کنید $(M_i)_{i\in I}$ ناتهی خانواده‌ای از L-ساختارها باشد. فرض کنید $U \subseteq P(I)$ یک فرافیلتر روی I باشد.

فرمول‌های با پارامتر

$\varphi(x, \frac{1}{2})$

$(\mathbb{Z}, +, 0) \not\models \exists x \ x+x=1$

پارامتر

$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq) \models \forall a,b,c \ \big(\exists x \ ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow (b^2-4ac) \geq 0 \vee a,b,c=0 \big)$

روی $\prod M_i$ رابطهٔ زیر را تعریف کنید:

$$(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I} \iff \{ i\in I \mid M_i \models a_i = b_i \} \in \mathcal{U}$$

به بیان دیگر $(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I}$ هرگاه تقریباً همه‌جا a_i با b_i برابر باشد.

almost everywhere

تمرین

نشان دهید که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\prod M_i$ است.

حال جهان یک ساختار مورد نظر خود را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\prod M_i / \sim \; = \{ [a_i]_{i\in I} \mid a_i \in M_i \}$$

$$\mathbb{M} = \left(\prod \mathcal{M}_i / U , \ldots \right)$$

$[a_i]_{i \in I} = [b_i] \iff \{ i \mid \mathcal{M}_i \models a_i = b_i \} \in U$

تعبیر علائم زبانی

الف) فرض کنید $f(x_1, \ldots, x_n)$ یک نماد تابعی در $\mathcal{L}$ باشد.

تعریف می‌کنیم:

$$f^{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^n \longrightarrow \mathbb{M}$$

$$f^{\mathbb{M}}\left([a_i^1]_{i \in I}, \ldots, [a_i^n]_{i \in I} \right) = \left[f^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n) \right]$$

$$f^{\mathcal{M}_i} : M_i^n \longrightarrow M_i$$

$$f^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^n) -$$

$a_i^j \in M_i$

$$\star \Longrightarrow w \subseteq w' \underset{\text{فیلتر}}{\overset{U}{\Longrightarrow}} w' \in U$$

تمرین

نشان دهید که $f^{\mathbb{M}}$ یک تابع است.

$$[a_i] = [b_i] \overset{?}{\Longrightarrow} f^{\mathbb{M}}(a_i) \overset{?}{=} f^{\mathbb{M}}(b_i)$$

$$\Big\| \qquad [f^{m_i}(a_i)] \qquad [f^{m_i}(b_i)]$$

$$w = \{i \mid m_i \models a_i = b_i\} \in U$$

$$w' = \{i \mid m_i \models f^{m_i}(a_i) = f^{m_i}(b_i)\} \overset{?}{\in} U$$

$$\star \quad m_i \models a_i = b_i \Rightarrow m_i \models f^{m_i}(a_i) = f^{m_i}(b_i)$$

تمرین ثابت کنید که

$$\mathbb{M} \models f^{\mathbb{M}}([a_i]) = [b_i]$$

$$\Longleftrightarrow \{i \mid \underbrace{m_i \models f^{m_i}(a_i) = b_i}\} \in U$$

$$\Big\|$$

$$[f^{m_i}(a_i)] = [b_i]$$

ب) فرض کنید $R(x_1,\dots,x_n)\in \mathcal{L}$ یک نماد رابطه‌ای باشد.

$$R^{\mathbb{M}}\left([a_i^1],\dots,[a_i^n]\right) \iff \{i \mid m_i \models R(a_i^1,\dots,a_i^n)\}\in U$$

ج) فرض کنید $c\in \mathcal{L}$ نماد برای یک ثابت باشد

آن گاه

$$c^{\mathbb{M}} = \left[c^{m_i}\right]$$

$$\mathbb{M} = \left(\prod m_i / U, \left(f^{\mathbb{M}}, R^{\mathbb{M}}, c^{\mathbb{M}}\right)_{f,R,c\in \mathcal{L}}\right)$$ نیز برای

یک $\mathcal{L}$-ساختار است.

قضیه (واش Łoś)

فرض کنید $(M_i)_{i\in I}$ کلاسی از L-ساختارها باشد و

U یک فرافیلتر روی I باشد. فرض کنید $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ یک L-فرمول باشد

آن گاه

$$\prod M_i/U \models \varphi([a_i^1],\dots,[a_i^n]) \iff \{i \mid M_i \models \varphi(a_i^1,\dots,a_i^n)\} \in U$$

اثبات ج بعد: