تمرین

فرافیلتر U غیر اصلی است $\Leftrightarrow$ شامل هیچ مجموعهٔ متناهی‌ای نباشد.

تمرین هر فرافیلتر غیر اصلی شامل فیلتر فرشه است

تمرین هر فرافیلتر شامل فیلتر فرشه غیر اصلی است.

تعریف

می‌گوییم مجموعهٔ $D \subseteq P(I)$ دارای ویژگی اشتراک متناهی ناتهی است هرگاه برای هر $A_1,\dots,A_n \in D$ (برای هر $n\in\mathbb{N}$) داشته باشیم $A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n\neq\emptyset$.

Finite intersection Property (FIP)

لم فرض کنید $D\subseteq P(I)$ دارای ویژگی اشتراک متناهی ناتهی باشد. آنگاه اگر تعریف کنید:

$$\langle D\rangle = \left\{ X\subseteq I \;\middle|\; \begin{array}{l}\exists A_1,\dots,A_n\in D\\ A_1\cap\dots\cap A_n\subseteq X\end{array}\right\}$$

تمرین

① نشان دهید که $\langle D \rangle$ یک فیلتر روی I است.

② نشان دهید که $\langle D \rangle$ کوچکترین فیلتر شامل D است.

$$\langle D \rangle = \bigcap_{\substack{D \subseteq F \\ \text{فیلتر}}} F$$

نتیجه

اگر $D \subseteq P(I)$ دارای ویژگی اشتراک متناهی باشد آن‌گاه یک فرافیلتر U $D \subseteq U$ موجود است.

منطق مرتبهٔ اول

تعریف منظور از یک زبان مرتبهٔ اول یک مجموعه به صورت $\mathcal{L} = F \cup R \cup C$ است.

به عنصر موجود در F نمادهای تابعی گفته می‌شود

مجموعهٔ نمادهای روابط

مجموعهٔ نمادهای ثابت

$f \in F$

$f(x_1, \dots, x_n)$

$g(x_1, \dots, x_m)$

قدم اول مطالعهٔ هر سیستم در ریاضیات انتخاب یک زبان مناسب است.

$$\mathcal{L}_{group} = \{ e, \times \}$$

$$\mathcal{L}_{pure\ set} = \emptyset$$

$$\mathcal{L}_{graph} = \{ R(x,y) \}$$

$$\mathcal{L}_{order} = \{ \leq \}$$

$$\mathcal{L}_{Ordered\,group} = \mathcal{L}_{group} \cup \{ \leq \}$$

$$\mathcal{L}_{ring} = \{ +, \cdot, 0, 1 \}$$

تعریف

فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبهٔ اول باشد.
منظور از یک $\mathcal{L}$-ترم، یک کلمه است که در این زبان قابل نوشتن است. به طور دقیق مجموعهٔ $\mathcal{L}$-ترم‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

الف) هر متغیر x و هر ثابت $c \in \mathcal{L}$ یک $\mathcal{L}$-ترم است.

ب) اگر $t_1, \dots, t_n$ ترم باشند و $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}$ آنگاه $f(t_1, \dots, t_n)$ یک ترم است.

مثال

ترم‌ها را در زبان $\mathcal{L}_{ring}$ مشخص کنید.

$$0, \quad 1, \; x, \; y, \; z$$

$$\underbrace{1+1}_{2} \qquad \big(+ (1,1) \big)$$

$$\underbrace{1+1+1}_{3}$$

$$\underbrace{1+1+1+1}_{4}$$

$$x \times x \times x \times x \times x + x \times x$$

تمرین

نشان دهید که هر ترم در زبان حلقه‌ها متناظر با یک چندجمله‌ای

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

است.

تعریف

فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد.

منظور از یک $\mathcal{L}$-ساختار $\mathfrak{M}$ عبارتی به صورت زیر است:

$$\mathfrak{M} = \langle M, (Z^{\mathfrak{M}})_{Z\in\mathcal{L}} \rangle$$

جهان ساختار $\mathfrak{M}$

که در آن $Z^{\mathfrak{M}}$ برای هر $Z\in\mathcal{L}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

(1) اگر $Z\in C$ یک نماد ثابت در زبان باشد آن گاه

$$Z^{\mathfrak{M}} = C^{\mathfrak{M}}$$

یک عنصر در M است که به آن تعبیر ثابت c در ساختار $\mathfrak{M}$ گفته می‌شود.

(2) اگر $Z=f(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{L}$ آن گاه

$$Z^{\mathfrak{M}}: M^n \to M$$

$f^{\mathfrak{M}}: M^n\to M$ یک تابع است.

(3) اگر $Z=R(x_1,\dots,x_n)$ یک نماد رابطه‌ای باشد آن گاه

$$Z^{\mathfrak{M}} \subseteq \underbrace{M\times M\times\dots\times M}_{n \text{ بار}}$$

یک رابطه روی M است.

مثال

فرض کنید $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ring}$.

آنگاه $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}} \rangle$

یک L-ساختار است.

$+^{\mathfrak{N}} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$(x,y) \mapsto x+y$

$0^{\mathfrak{N}} = 0$

$1^{\mathfrak{N}} = 1$

$\cdot^{\mathfrak{N}} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$(x,y) \longrightarrow x \cdot y$

مثال $\mathcal{L} = \{R(x,y)\}$

نماد رابطه‌ای

① $\mathfrak{M} = \langle M, R^{\mathfrak{M}} \rangle$

چند L-ساختار مثال بزنید:

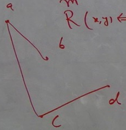
$M = \{$ افرادی که در کلاس هستند $\}$

$R^{\mathfrak{M}}(x,y) \iff$ x، y را بشناسد

② $\mathfrak{M} = \langle M, R^{\mathfrak{M}} \rangle$

$M = \{a, b, c, d\}$

$R^{\mathfrak{M}}(x,y) \iff$ x، y مجاور هستند



فرض کنید $\{x_i\}_{i\in\omega}$ مجموعه متغیرها باشند.

$$\beta : x_i \to a_i \in M$$

تعریف

فرض کنید L یک زبان مرتبه اول، M یک L-ساختار باشد. یک نگاشت $(x_i)_{i\in\omega} \mapsto (a_i)_{i\in\omega}$ در نظر بگیرید.

مجموعه متغیرها — $a_i \in M$

$$\bar{x} \mapsto \bar{a}$$

فرض کنید $t(x_1,\dots,x_n)$ یک L-ترم باشد.

عنصر $t^M(a_1,\dots,a_n) \in M$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

الف) اگر ترم t یک متغیر x_1 باشد. $t = x_1$، $t(x_1,\dots,x_n)$

$$t^M(\underbrace{a_1,\dots,a_n}) = a_1$$

ب) اگر $t_1^M(a_1,\dots,a_n), \dots, t_m^M(a_1,\dots,a_n)$ تعریف شده باشند آنگاه

$$\left(f(t_1,\dots,t_m)(a_1,\dots,a_n)\right)^M = f^M\left(t_1^M(a_1,\dots,a_n),\dots,t_m^M(a_1,\dots,a_n)\right)$$

تعریف

فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد.

مجموعه L-فرمول‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

الف) اگر $t_1(x_1,\dots,x_n)$ و $t_2(x_1,\dots,x_n)$ دو ترم باشند عبارت

$$t_1(x_1,\dots,x_n) = t_2(x_1,\dots,x_n)$$

یک L-فرمول است.

ب) اگر R یک نماد رابطه‌ای p-تایی باشد و $t_1(x_1,\dots,x_n), \dots, t_m(x_1,\dots,x_n)$ ترم باشند آنگاه

$$R(t_1(x_1,\dots,x_n),\dots,t_m(x_1,\dots,x_n))$$

یک L-فرمول است.

ج) اگر دانسته باشد که φ_1, φ_2 فرمول هستند آنگاه

$\neg\varphi_1$

$\varphi_1 \wedge \varphi_2$

$\varphi_1 \vee \varphi_2$

فرمول هستند

د) اگر $\varphi(x)$ یک فرمول باشد آنگاه:

$\forall x \ \varphi(x)$

$\exists x \ \varphi(x)$

نیز فرمول هستند.

مثال: چند فرمول در زبان حلقه‌ها

$$\forall y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ \exists x \quad y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \cdots + y_5 x^5 = 0$$

توجه: برخی فرمول‌ها دارای متغیر آزاد هستند. مثال در زبان حلقه‌ها فرمول زیر دارای دو متغیر آزاد است:

$$2x + 3y = 0$$

فرمول زیر دارای یک متغیر آزاد و یک متغیر پای‌بند است

$$\exists x \quad 2x + 3y = 0$$

فرمول زیر دارای هیچ متغیر آزادی نیست

$$\exists x \ \exists y \quad 2x + 3y = 0$$

به فرمولی که هیچ متغیر آزادی نداشته باشد جمله گفته می‌شود.

تعریف

فرض کنید $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ یک L-فرمول باشد.

هم چنین فرض کنید $\mathcal{M}$ یک L-ساختار باشد.

$=(M,\dots)$

$a_1,\dots,a_n \in M$، اگر در $\mathcal{M}$ فرمول $\varphi(a_1,\dots,a_n)$ درست باشد

می‌نویسیم

$\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)$.

مثال

$\varphi : \exists x \;\; x+1=1+1+1$

$\mathcal{N} \models \exists x \;\; x+1=1+1+1$

$\shortparallel$

$\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

مثال $\varphi(y) : \exists x \;\; x+y=2$

$\mathcal{N} \models \varphi(1)$