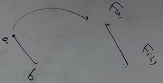

تعریف

در L-ساختار $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ را ایزومورف می‌نامیم هرگاه یک نگاشت یک‌به‌یک و پوشای $F: M \to N$ موجود باشد به طوری که

$c^{\mathcal{M}} \overset{F}{\longmapsto} c^{\mathcal{N}}$ (برای هر ثابت $c \in \mathcal{L}$)

$f^{\mathcal{M}}(a_1,\dots,a_n) \overset{F}{\longmapsto} f^{\mathcal{N}}(F(a_1),\dots,F(a_n))$ (برای هر تابع $f \in \mathcal{L}$ و $a_1,\dots,a_n \in M$)

$(a_1,\dots,a_n) \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow (F(a_1),\dots,F(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$ (برای هر رابطه $R \in \mathcal{L}$ و $a_1,\dots,a_n \in M$)

تئوری‌های کامل

(فرض کنیم که T دارای مدل باشد.)

L-تئوری T را کامل می‌نامیم هرگاه یکی از شرایط معادل زیر صدق کند.

① برای هر L-جمله φ: $T \vdash \varphi$ یا $T \vdash \neg\varphi$ (دقیقاً یکی از اینها)

② هر دو مدل $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ هم‌ارز مقدماتی باشند: $\forall \mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$

③ $T \equiv Th(\mathcal{M})$ برای یک (هر) $\mathcal{M} \models T$

تمرین

فرض کنید $F: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ یک ایزومرفیسم باشد.

نشان دهید که برای هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ و هر $\bar{a} \in M$ داریم

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(F(\bar{a}))$$

(به طور خاص اگر $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ ایزومرف باشند آن گاه $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$)

تمرین

اگر $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو L-ساختار متناهی باشند

آن گاه $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$

ایزومرف

(آیا شرط متناهی بودن لازم است؟)

$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو L-ساختار

قضیه

فرض کنید یک سامانه‌ی رفت و برگشتی ناتهی از ایزومرفیسم‌های میان زیرساختارهایی از $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ وجود داشته باشد. آن‌گاه $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

تعریف

فرض کنید $\Gamma = \{ f: A \to B \mid A \subseteq \mathcal{M},\ B \subseteq \mathcal{N} \}$ یک مجموعه از ایزومرفیسم‌ها میان برخی زیرساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ باشد. Γ را یک سامانه‌ی رفت و برگشتی از ایزومرفیسم‌های جزئی می‌نامیم هرگاه

(Back and forth system of partial isomorphisms)

\mathfrak{A}

① $\Gamma \neq \emptyset$

② برای هر $t \in M$ و هر $f \in \Gamma$

$f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$

یک ایزو در Γ ، $g \in \Gamma$ وجود داشته باشد به طوری که

$f \subseteq g : (g|_A = f)$ (در تعریف)

$t \in \mathrm{Dom}(g)$,

③ برای هر $t \in N$ و هر $f \in \Gamma$

$f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$

یک ایزو در Γ ، $g \in \Gamma$ موجود است به طوری که

$f \subseteq g$

$t \in \mathrm{Im}(g)$,

$$\begin{array}{ccc} \overset{t}{m} & & \overset{u}{n} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \cong & B \end{array}$$

$\langle A, t \rangle \cong \langle B, t' \rangle$

$\langle A, u' \rangle \cong \langle B, u \rangle$

قضیه: DLO یک تئوری کامل است.

فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models DLO$. ادعا: $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

ادعا: سامانه‌ی ایزومورفیسم‌ها میان زیرساختارهای متناهی $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ رفت و برگشتی است.

$\mathcal{M} \models DLO \qquad \mathcal{N} \models DLO$

$\mathcal{M} \supseteq \{a\} \qquad \{b\}$

$f: a \to b$

Dense linear order

یادآوری

$T = DLO$

$L = \{<\}$

$\{\text{ترتیب خطی}\} \cup \{\exists x,y \ \ x \neq y\}$

$\{\forall x,y \ (x<y \to \exists t \ \ x<t<y)\}$

$\cup \{\forall x \ \exists y \ \ y>x\} \cup \{\forall x \ \exists y \ \ y<x\}$

$(\mathbb{Q}, <) \models DLO \qquad (\mathbb{R}, <) \equiv (\mathbb{Q}, <)$

$(\mathbb{R}, <) \models DLO$

فرض کنید $f\in\Gamma$, $t\in M$.

$f: a_1<\dots<a_n \longrightarrow b_1<\dots<b_n$

$t<a_1<\dots<a_n$ $\quad \exists t'$ $\quad t'<b_1<\dots b_n$

$t,a_1,\dots,a_n \longrightarrow t',b_1-b_n$

$\mathcal{M}$ $\quad \mathcal{N}\models\exists t'$

$t<a_1<\dots<a_n \cong t'<b_1,\dots,b_n$

ادامه باشد:

$f\subseteq g\in\Gamma$

$g=f\cup\{(t,t')\}$

قضیه (کانتور)

هر دو مدل شمارای DLO با هم ایزومرف هستند.

اثبات: فرض کنید

$M = (m_i)_{i\in\omega}$

$N = (n_i)_{i\in\omega}$

$f_0 : a \to b$ یک ایزومرفیسم جزئی است.

هدف: ساختن ایزومرفیسم‌های $f_1 \subseteq f_2 \subseteq \cdots$

به طوری که $m_i \in Dom(f_i)$ ، $n_i \in Img(f_i)$

$Dom\, f_i$ ، $Im\, f_i$ متناهی‌اند

در این صورت $F = \underbrace{\bigcup f_i}_{\text{}} : M \to N$

یک‌به‌یک و پوشا، ایزومرفیسم

فرض کنید f_i ساخته شده باشد.

هدف: ساختن f_{i+1} به طوری که

$m_{i+1} \in Dom(f_{i+1})$

$n_{i+1} \in Img(f_{i+1})$

اثبات: اگر $m_{i+1} \notin Dom(f_i)$ آن‌گاه مطابق اثبات قبل

$\exists t \in N \quad (m_{i+1}, t) \in f_2 \supseteq f_i$

$\exists \cdots$

$t_3 t_4 t_2 \bar{a} \subseteq t_3 \bar{b} t_2 t_1$

اثبات قضیه

فرض کنید بین $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$

یک سامانه‌ی رفت و برگشتی Γ وجود داشته باشد.

ادعا: برای هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ و هر $\bar{m} \in M$

یک متغیر $\bar{n} \in N$ موجود است به طوری که

$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\bar{n})$

اثبات ادعا: استقرا روی ساخت ترم‌ها.

$\mathcal{M} \models t_1(\bar{m}) = t_2(\bar{m})$

فرض کنید $f \in \Gamma$. $\bar{m}$ را به دامنه f اضافه کنید

$g \in \Gamma$ $\qquad m \in Dom(g)$

$g: \underset{\bar{m}}{\underset{\cup}{A}} \to B$ $\qquad g \supseteq f$

از آنجا که $A \subseteq \mathcal{M}$، تحت توابع بسته است.

$m \in A \qquad g(m) \in B$

$A \longrightarrow B \models t_1(g(m))$

$$t_1(g(m)) = t_2(g(m))$$

$A \models t_1(\bar{m}) = t_2(\bar{m})$

کافیست قرار دهیم $\bar{n} = g(\bar{m})$.

فرض کنید حکم برای فرمول $\varphi(x)$ درست باشد.

$\exists x\, \varphi(x)$ درست است.

ادعا: حکم برای فرمول

$$\mathcal{M} \models \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \exists m \in M$$

$$m \models \varphi(m)$$

بنا بر فرض استقرا $n \in N$ موجود است به طوری که $\mathcal{N} \models \varphi(n)$

یعنی $\mathcal{N} \models \exists x\, \varphi(x)$. تکمیل اثبات تمرین

$k \geq \aleph_0$.

قضیه: فرض کنید هر دو مدل T از اندازه k با هم ایزومورف باشند و T مدل متناهی نداشته باشد. آنگاه T کامل است.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \mathcal{N} & \\ \curlywedge & \curlyvee & \\ \mathcal{M}' & \mathcal{N}' & \mathcal{M}, \mathcal{N} \models T \\ |\mathcal{M}'| = k & |\mathcal{N}'| = k & \end{array}$$

$$\mathcal{M}' \cong \mathcal{N}' \Rightarrow \mathcal{M}' \equiv \mathcal{N}' \Rightarrow$$

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$$