قضیه

تئوری T دارای یک اصل‌بندی معادل به صورت $\exists\forall$ است اگر و تنها اگر کلاس مدل‌های T تحت اجتماع زنجیرها بسته باشد، یعنی اگر $(M_i : i \in I)$ زنجیری از مدل‌های T باشد آن‌گاه $T \models \bigcup M_i$.

اثبات

فرض کنید که کلاس مدل‌های تئوری T تحت اجتماع زنجیرها بسته باشد.

هدف: پیدا کردن یک تئوری T' که جملات به کار رفته در آن به صورت $\exists\forall$ باشند و مدل‌های T' و مدل‌های T یکسان باشند.

قرار دهید

$$T' = \{\varphi \mid T \models \varphi,\ \varphi \text{ جمله‌ای به صورت } \exists\forall \text{ است}\}$$

ادعا: اگر $M \models T'$ آن‌گاه $M \models T$.

اثبات ادعا

ادعای اول: یک مدل $\mathfrak{N} \models T$ موجود است

بطوری که هر جمله $\exists\forall$ که در $\mathfrak{M}$ درست باشد در

$\mathfrak{N}$ نیز درست است.

اثبات ادعای اول

تئوری زیر را در نظر بگیرید:

$$T_1 = T \cup \overbrace{\{\varphi \mid \mathfrak{M} \models \varphi,\ \varphi \text{ بصورت } \exists\forall \text{ است}\}}^{\Delta}$$

کافی است نشان دهیم که T_1 دارای مدل است.

اگر T_1 دارای مدل نباشد

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Delta$

تعداد متناهی جمله

پیدا می‌شوند بطوری که

$$T \models \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$$

فعلاً فرض کنید که تعداد φ_i ها یکی باشد.

یعنی $\exists \varphi \in \Delta$ بطوری که

$$T \models \neg\varphi$$

$$\mathcal{M} \models T' = \{\varphi \mid T \vdash \varphi,\ \varphi\ \forall\exists\}$$

ادعای دوم

یک مدل $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}' \models T$ ، $\mathcal{N}' \cong \mathcal{N}$ پیدا می‌شود.

اثبات

کافی است نشان دهیم که تئوری زیر سازگار است (در زبان L_M)

$$T_2 = \mathrm{Diag}(M) \cup Th(\mathcal{N})$$

$\varphi_1 : \exists \bar{x}\, \forall \bar{y}\ \psi_1(\bar{x}, \bar{y})$

$\varphi_2 : \exists \bar{z}\, \forall \bar{t}\ \psi_2(\bar{t}, \bar{z})$

$\varphi_1 \wedge \varphi_2 : \exists \bar{x}\, \exists \bar{z}\, \forall \bar{y}\, \forall \bar{t}\ \underbrace{\psi_1(\bar{x}, \bar{y})} \wedge \psi_2(\bar{t}, \bar{z})$

از آنجایی که φ به صورت $\forall\exists$ است پس $\neg\varphi$ به صورت $\exists\forall$ است.

$$T \models \neg\varphi$$

بنابراین $\neg\varphi \in T'$ پس $\mathcal{M} \models \neg\varphi$

$\square$ پایان اثبات

ادعای اول

اثبات سازگاری T_2

به برهان خلف فرض کنید که T_2 دارای مدل نباشد.

$\varphi(\bar m) \in Diag\, M$ موجود است به طوری که

نه برای جمله‌ی φ_M

$$Th(N) \models \neg\varphi(\bar m)$$

پس

$$Th(N) \models \forall x\, \neg\varphi(\bar x)$$

پس $N \models \forall x\, \neg\varphi(\bar x)$

(یادآوری: در N تمام جملات $\forall\exists$ درست در M درست هستند)

سوال: از این نتیجه می‌شود که

$$* \quad M \models \forall x\, \neg\varphi(\bar x)$$

(در غیر این صورت $M \models \exists x\, \varphi(\bar x)$ نتیجه

$\Rightarrow N \models \exists x\, \varphi(\bar x)$)

با فرض * و $M \models \varphi(\bar m)$

تناقض دارد.

برای اثبات ادعای سوم کافی است نشان دهیم که

$$T_3 = \mathrm{Diag}_{el}(n) \cup \mathrm{Diag}_{el}(m)$$

(زبان $\mathcal{L}_{NM}$)

دارای مدل است.

$n \models T$

$$m \subseteq n \subseteq m' \qquad m \preccurlyeq m'$$

ادعای سوم

$$m \preccurlyeq m' :=$$

$$m \models \varphi(\bar m) \Leftrightarrow m' \models \varphi(\bar m) \quad (\bar m \in M)$$

$$\mathrm{Diag}_{el}(m) = \{\varphi(\bar m) \mid m \models \varphi(\bar m)\}$$

زبان $\mathcal{L}_M$

مرور

$$T' = \{\, \forall\exists \text{ تمام نتایج از } T \,\}$$

تا اینجا نشان دادیم که $m \models T'$

$$\exists n \models T \quad m \subseteq n$$

تمام جملات $\forall\exists$ که در m درست باشند در n درستند

اگر T_3 مدل نداشته باشد

$\varphi(\bar{n}) \in \mathrm{Diag}(\mathcal{N})$

$\psi(\bar{m}) \in \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$

ℓ

موجودند که

$\psi(\bar{m}) \models^{\ell_{MN}} \neg\varphi(\bar{n})$

$\psi(\bar{m}) \models^{\ell_{M}} \forall x\, \neg\varphi(\bar{x})$

$\mathcal{M} \models \psi(\bar{m}) \Rightarrow$

$\mathcal{M} \models \forall x\, \neg\varphi(\bar{x})$

$\Downarrow$

$\mathcal{N} \models \forall x\, \neg\varphi(\bar{x})$

$\mathcal{N} \models \varphi(\bar{n})$

ساختار M, N

<u>تعریف</u>

$f : M \to N$

نگاشت

را یک نشاندن مقدماتی می‌نامیم هرگاه برای هر $\bar{m} \in M$

داشته باشیم

$$M \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow N \models \varphi(f(\bar{m}))$$

(برای هر فرمول φ)

نتیجه $\forall\exists$ T

$M \models T$ $\qquad$ $N_i \models T$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, bend right, "\preceq"'] & \subseteq N \subseteq & M_1 \arrow[rr, bend right, "\preceq"'] & \subseteq N_1 \subseteq & M_2 \subseteq \cdots
\end{tikzcd}$$

از طرفی $\bigcup N_i = \bigcup M_i \models T$

$M \preceq \bigcup M_i$

$M \models T$

قضیه

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_1 & & \mathcal{N}_2 \\
& \mathcal{M} \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

f_iها مقدماتی‌اند.

آنگاه یک ساختار $\mathcal{N}$ همراه نشاننده‌ی

مقدماتی g_1 , g_2 وجود داشت به طوری که

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{N} & \\
\mathcal{N}_1 \arrow[ur, "g_1"] & & \mathcal{N}_2 \arrow[ul, "g_2"'] \\
& \mathcal{M} \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$$

amalgamation

بسمه تعالی

$f: M \to N$

$M \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow N \models \varphi(f(\bar{m}))$ بی‌سور

$\bar{m} \in M$

e_M

$N \models \mathrm{Diag}(M) \Leftrightarrow \exists f: M \to N$ ①

حافظ فرمولهای بی‌سور

$N \models \mathrm{Diag}_{el}(M) \Leftrightarrow \exists f: M \to N$ ②

نشاندن مقدماتی

$$\mathrm{Diag}(M) = \left\{ \underbrace{\varphi(m_1, \dots, m_k)}_{\text{بی‌سور}} \;\middle|\; \begin{array}{l} m_i \in M \\ M \models \varphi(m_1, \dots, m_k) \end{array} \right\}$$

طرح اثبات

باید نشان دهیم که

$$\mathrm{Diag}_{el}(N_1) \cup \mathrm{Diag}_{el}(N_2)$$

سازگار است. به برهان خلف فرض کنید $\varphi(\bar{n}_1) \in \mathrm{Diag}_{el}(N_1)$ با $\psi(\bar{n}_2) \in \mathrm{Diag}_{el}(N_2)$

ناسازگار باشند

$$\varphi(\bar{n}_1) \models^{L_{N_1 N_2}} \neg \psi(\bar{n}_2)$$

توجه

$\mathcal{M} \models \exists x\ \varphi(x)$

$\mathcal{M} \models \exists x\ \neg\varphi(\bar{x})$

نقض

$\varphi(\bar{n}_1) \models^{L_{n_1}} \forall \bar{x}\ \neg\varphi(\bar{x})$

$\exists x\ \varphi(x) \models^{L} \forall x\ \neg\neg\varphi(\bar{x})$

تمرین

$\varphi(c) \models^{L_c} \chi$

$\Rightarrow \exists x\ \varphi(x) \models^{L} \chi$

بسمه تعالی

یادآوری

$\aleph < x < 2^{\aleph}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}^c \subseteq \mathbb{R}$

① $T \nvDash \varphi \iff T\cup\{\neg\varphi\}$ مدل داشته باشد.

$T\vDash\neg\varphi \not\Leftarrow T\nvDash\varphi$

امکان وجود دارد که $T\nvDash\varphi$, $T\nvDash\neg\varphi$. یعنی $T\cup\{\varphi\}$, $T\cup\{\neg\varphi\}$ سازگار باشند.

حتی این امکان وجود دارد که $T\vDash\varphi$, $T\vDash\neg\varphi$

$T=\{\varphi,\neg\varphi\}$

$T\vDash\neg\varphi \not\Leftarrow T\nvDash\varphi$

تعریف φ زبان L (T سازگار)

φ - جمله‌ای

تئوری T را کامل می‌نامیم هرگاه برای هر

اگر $T\nvDash\varphi$ آنگاه $T\vDash\neg\varphi$.

تم تئوری T کامل است اگر و تنها اگر هر دو مدل T، $\mathfrak{M},\mathfrak{N}\vDash T$ هم‌ارز مقدماتی باشند.

$\mathfrak{M}\equiv\mathfrak{N}$

نمادها

$m \equiv m'$

$T \equiv T'$

(سازگار)

<u>لم</u>

اگر T کامل باشد، $n \models T$

آن‌گاه

$$T \equiv Th(n) = \{\varphi \mid n \models \varphi\}$$

$\boxed{\text{اثبات دو لم تمرین}}$