تصفیه

تئوری T دارای اصل‌بندی عمومی است، یعنی: دارای یک اصل‌بندی با جملات به صورت

$$\forall \bar{x} \quad \underbrace{\varphi(\bar{x})}_{\text{بی‌سور}}$$

است اگر و تنها اگر کلاس مدلهای این تئوری، تحت زیرساختارها بسته باشد؛ یعنی هرگاه $\mathcal{M} \models T$ و $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ زیرساختار آن‌گاه $\mathcal{N} \models T$.

یعنی یک تئوری T' موجود باشد که همهٔ جملات به کار رفته در T' فقط با سور عمومی نوشته شده باشند و $T' \equiv T$ (یعنی برای هر ساختار $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \models T \Leftrightarrow \mathcal{M} \models T' \;)$$

- اصل‌بندی یک کلاس $\mathbb{K}$ از $\mathcal{L}$-ساختارها یعنی پیدا کردن یک تئوری T به طوری که

$$\mathbb{K} = \{ \mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models T \}$$

- پیدا کردن یک اصل‌بندی خاص برای کلاس مدلهای یک تئوری.

توجه: اگر M یک L-ساختار باشد آنگاه M مدلی برای تئوری زیر است:

$$Th(M) = \{\varphi \mid M \models \varphi\}$$

φ جمله است

مثال

تئوری ترتیب‌های خطی چگال

$L = \{<\}$

DLO

Dense linear orders

$$\forall x \ \neg(x < x)$$

$$\forall x, y \quad x < y \vee y < x \vee x = y$$

$$\forall x, y, z \quad x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$$

$$\forall x, y \quad x < y \rightarrow \exists z \ x < z < y$$

$$(\mathbb{Z}, <) \subseteq (\mathbb{Q}, <) \models DLO$$

$$\mathbb{Z} \models m < n \Rightarrow \mathbb{Q} \models m < n$$

$$(\mathbb{Z}, <) \not\models DLO$$

تصفیه

تئوری T دارای اصل بندی عمومی است، یعنی: دارای یک اصل بندی با جملات به صورت

$$\forall \bar{x}\ \underbrace{\varphi(\bar{x})}_{\text{بی سور}}$$

است اگر و تنها اگر کلاس مدلهای این تئوری، تحت زیرساختار بسته باشد؛ یعنی هرگاه $\mathcal{N} \models T$ و $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ (زیرساختار) آنگاه $\mathcal{M} \models T$.

اثبات: فرض کنید T دارای یک اصل بندی عمومی باشد.

$\mathcal{N} \models T$ ، $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ ، نشان دهید که $\mathcal{M} \models T$.

$$\mathcal{N} \models \forall \bar{x}\ \varphi(\bar{x})$$

$$\forall \bar{n} \in N \quad \varphi(\bar{n}) \quad \text{بدون سور}$$

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$

$\bar{m} \in M$ داریم

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \models \varphi(\bar{m})$$

و φ بدون سور است پس

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{m})$$

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$

$\mathcal{N} \models \forall x\ \varphi(x)$

$\forall m \in M \quad \mathcal{N} \models \varphi(m)$

$\Downarrow$

$\mathcal{M} \models \varphi(m)$

یادآوری

اگر $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$ آنگاه برای هر فرمول بدون سور $\varphi(\bar{x})$ و هر $\bar{m} \in M$ داریم

$$\mathfrak{m} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \mathfrak{n} \models \varphi(\bar{m}).$$

اثبات جهت عکس

فرض کنید که کلاس مدلهای تئوری T تحت زیرساختارها بسته باشد.

ادعا: یک تئوری $T \equiv T'$ موجود است به طوری که تمام جملات T' تنها با سورهای عمومی نوشته شوند.

قرار دهید:

$$T' = \{ T \models \varphi \}$$ تمام جملات φ به صورت عمومی که

فرض کنید $M \models T'$. ادعا می‌کنیم که $M \models T$

(در زبان L_M)

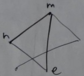
مجموعه زیر از جملات را در نظر بگیرید.

$$\mathrm{Diag}(M) \cup T$$

$$\overset{\shortparallel}{\{ \varphi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}) \mid M \models \varphi(m_1, \ldots, m_k) \}}$$

بدون سور

$$L_M = L \cup \{ c_m \mid m \in M \}$$



ادعای اول

$\mathrm{Diag}(M) \cup T$ یک تئوری دارای مدل است.

ادعای دوم

از ادعای اول حکم قضیه نتیجه می‌شود.

اگر $N \models \mathrm{Diag}(M) \cup T$ آنگاه $N \overset{L}{\models} T$

ثانیاً $N \overset{L_M}{\models} \mathrm{Diag}(M)$

توجه) فرض کنید $\mathcal{N} \models_{L_M} \mathrm{Diag}(M)$.

آنگاه تابع زیر را می‌توان از M به N تعریف کرد

$$M \longrightarrow N$$
$$m \longmapsto c_m^{\mathcal{N}}$$

نیز برای $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

پس $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \models T$ نیز برای اینکه کلاس مدهای T تحت زیرساختارگیری بسته است نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{M} \models T$ $\square$

ادامه لزوم

$$L_M = L \cup \{c_m \mid m \in M\}$$

$$\mathcal{M} = \langle \underset{m \in M}{M}, - \rangle$$

اثبات ادعای اول

$\mathrm{Diag}(M)\cup T$ یک تئوری در زبان L_M است.

بنا به قضیه فشردگی برای اثبات این که تئوری فوق دارای مدل است

کافی است اثبات کنیم که هر بخش متناهی از آن دارای مدل است.

فرض کنید $\underset{\text{متناهی}}{\Delta \subseteq} \mathrm{Diag}(M)\cup T$ دارای مدل نباشد.

بنابراین حکم

$\varphi(\bar m)\in \mathrm{Diag}(M)$ یافت می‌شود به طوری

$$\{\varphi(\bar m)\}\cup T$$

دارای مدل نیست.

یعنی اگر $M\models T$ آنگاه $M\models \neg\varphi(\bar m)$

$$T\models^{L_{\bar m}} \neg\varphi(\bar m)$$

ب) برای درستی ل ۲ :

$$T \models \forall x \neg\varphi(\bar{x})$$

یعنی $\forall x \neg\varphi(\bar{x})$ یک نتیجه عمومی از تئوری T است. یعنی

$$\forall x \neg\varphi(\bar{x}) \in T'$$

از طرفی $\mathcal{M} \models T'$

پس $\mathcal{M} \models \forall x \neg\varphi(\bar{x})$

$\varphi(\bar{m}) \in Diag(M)$ داریم تغییر ممکن است زیرا

T

$T' = \{\varphi \mid T \models \forall\varphi\}$

$\mathcal{M} \models T' \Rightarrow \mathcal{M} \models T$

$\mathcal{N} \models Diag(M) \cup T \quad T \supseteq \mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$

$T \models \neg\varphi(\bar{m})$

$T \models \forall x \neg\varphi(\bar{x})$

فرض کنید $\{M_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر از L-ساختارها

مرتب خطی

باشد. $i<j \Rightarrow M_i \subseteq M_j$

توجه کنید که در این صورت $\bigcup_{i\in I} M_i$ را می‌توان تبدیل به یک L-ساختار کرد به طوری که $M_i \subseteq \bigcup M_i$

(تمرین)

$T = Th(\mathbb{C}, +, \cdot; 0, 1)$

$(\mathbb{R}, +, \cdot; 0, 1) \subseteq (\mathbb{C}, +, \cdot; 0, 1)$

$\models Th(\mathbb{C}, -)$

$\mathbb{C} \models \exists x \; x^2+1=0$

$\mathbb{R} \not\models \exists x \; x^2+1=0$

بنابراین برای $Th(\mathbb{C})$ یک اصل‌بندی عمومی وجود ندارد.

تعریف

فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو L-ساختار باشند به طوری که $M \subseteq N$

می‌گوییم $\mathcal{M}$ زیرساختار مقدماتی از $\mathcal{N}$ است و می‌نویسیم $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$

هرگاه برای هر L-فرمول $\varphi(\bar{x})$ و هر چندتایی $\bar{a} \in M$ داشته باشیم

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$$

(به ویژه $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$)

$(\mathbb{Z},<) \subseteq (\mathbb{Q},<)$

$(\mathbb{Z},<) \nprec (\mathbb{Q},<)$

$\mathbb{Q} \models \exists x \; 2<x<3$

$\mathbb{Z} \not\models \exists x \; 2<x<3$

تمرین

فرض کنید $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ یک زنجیر مقدماتی از L-ساختارها باشد.

$i<j \Rightarrow \mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$

آن گاه $\mathcal{M}_i \prec \bigcup \mathcal{M}_i$

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4 \; \varphi(\bar{x},\bar{y})$

بی سور

قضیه

تئوری T دارای اصل بندی $\forall\exists$ است اگر و تنها اگر کلاس مدلهای T تحت اجتماع زنجیره بسته باشد.

(یعنی اگر $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ زنجیری از مدلهای T باشند آن گاه $T \models \bigcup \mathcal{M}_i$)

اثبات

فرض کنید تئوری T دارای اصل‌بندی $\forall\exists$ باشد و

$(M_i)_{i\in I}$ زنجیری از مدل‌های T باشد.

$$\psi : \forall \bar{x}\ \exists \bar{y}\ \varphi(\bar{x},\bar{y}) \in T$$

ادعا

$$\bigcup M_i \models \psi$$

باید نشان دهیم

$$\forall \bar{x} \in \bigcup M_i\ \ \exists \bar{y} \in \bigcup M_i\ \ \varphi(\bar{x},\bar{y})$$

کلاس مدلهای T تحت اجتماع

حال فرض کنید

زنجیرها بسته باشد. هدف: ارائه یک اصل‌بندی $\forall\exists$

برای T:

$$T' = \{ T \models \varphi \mid \varphi \text{ به صورت } \forall\exists \text{ است} \}$$

ادعا: اول اگر $M \models T'$ آنگاه $M \models T$

$\bar{a} \in \bigcup M_i \Rightarrow \bar{a} \in M_j$

$M_j \models \exists \overset{\bar{b}}{\bar{y}}\ \varphi(\bar{x}, \bar{y})$

$M_j \models \underbrace{\varphi(\bar{a}, \bar{b})}_{\text{بدون سور}} \Rightarrow \bigcup M_i \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$

$\bigcup M_i \models \forall \bar{x}\, \exists \bar{y}\ \varphi(\bar{x}, \bar{y})$

$\Rightarrow \bigcup M_i \models \exists \bar{y}\ \varphi(\bar{a}, \bar{y}) \Rightarrow$

ادامه اثبات

$$M \subseteq \underbrace{M_1}_{\models T} \subseteq \underset{\models T}{M_2} \subseteq \cdots$$

$$M = \bigcup M_i \models T$$