# تمرین‌های حل شده‌ی درس مباحثی در منطق

۱. فرض کنید $D$ یک فیلتر روی مجموعه‌ی $I$ باشد. نشان دهید عبارات زیر با هم معادل هستند.

الف) $\circ \notin D$

ب) $D$ دارای خاصیت اشتراک متناهی ناتهی (FIP) است.

۲. نشان دهید اشتراک هر تعداد فیلتر روی مجموعه $I$، یک فیلتر روی $I$ است.

۳. نشان دهید اجتماع هر زنجیر از فیلترها روی مجموعه $I$، یک فیلتر روی $I$ است.

۴. فرض کنید $U$ یک فرافیلتر روی مجموعه‌ی $I$ باشد و $X \in U$. نشان دهید $U \cap P(X)$ یک فرافیلتر روی مجموعه‌ی $X$ است. به طور مشابه برای فیلترها هم حکم برقرار است. (منظور از $P(X)$، مجموعه‌ی توانی $X$ است)

۵. ثابت کنید که $U$ یک فرافیلتر اصلی روی مجموعه‌ی $I$ است، اگر و تنها اگر برای یک $i \in I$ داشته باشیم

$$U = \{X \in P(I) | i \in X\}.$$

۶. نشان دهید اگر مجموعه‌ی $X$ نامتناهی باشد، آنگاه یک فرافیلتر غیراصلی روی مجموعه‌ی $X$ وجود دارد.

۷. نشان دهید فیلتر $D$ اصلی است اگر و تنها اگر $\cap D \in D$.

۸. فرض کنید $D$ یک فیلتر روی مجموعه‌ی $I$ باشد. نشان دهید $D$ یک فرافیلتر است اگر و تنها اگر برای هر $X, Y \in P(I)$ از $X \cup Y \in D$ نتیجه شود $X \in D$ یا $Y \in D$.

۹. ثابت کنید هر فرافیلتر غیراصلی شامل فیلتر فرشه است.

۱۰. فرض کنید $U$ یک فرافیلتر اصلی باشد بطوری که $\{j\} \in U$ و نیز $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از ساختارها باشند. نشان دهید فراضرب $\frac{\Pi \mathcal{M}_i}{U}$ با ساختار $\mathcal{M}_j$ ایزومرف است.

۱۱. فرض کنید $D$ یک فیلتر روی مجموعه‌ی $I$ باشد و $X \in D$. قرار دهید $E = D \cap P(X)$. ثابت کنید

$$\frac{\Pi \mathcal{M}_i}{D} \cong \frac{\Pi \mathcal{M}_i}{E}.$$

۱۲. نشان دهید یک فراضربی از ساختارهای متناهی وجود دارد که نامتناهی است.

۱۳. فرض کنید $D$ یک فیلتر روی مجموعه‌ی $I$ باشد. نشان دهید اگر برای هر $i \in I$ داشته باشیم $\mathcal{M}_i \equiv \mathcal{N}_i$ در این صورت $\frac{\Pi \mathcal{M}_i}{D} \equiv \frac{\Pi \mathcal{M}_i}{D}$.

۱۴. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار و $U$ یک فرافیلتر روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و برای هر $i \in \mathbb{N}$، $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}$. در این صورت به فراضرب $\frac{\Pi \mathcal{M}_i}{U}$ یک فراتوان از $\mathcal{M}$ گفته می‌شود. نگاشت زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{aligned} b : M &\longrightarrow \frac{\Pi \mathcal{M}_i}{U} \\ m &\longmapsto [m_i]_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $m_i = m$. نشان دهید که $d$ یک نگاشت مقدماتی است. همچنین نگاشت $d$ پوشاست اگر و تنها اگر $M$ متناهی باشد.

۱۵. در زبان $\mathcal{L} = \{E\}$، که $E$ یک رابطه‌ی دوموضعی است، تئوری رابطه‌ی هم‌ارزی‌ای را بنویسید که دارای بینهایت کلاس هم‌ارزی بینهایت عضوی باشد. بررسی کنید که این تئوری دارای چند مدل با اندازه‌ی $\aleph_\circ$، $\aleph_۱$ و $\aleph_۲$ است. آیا تئوری $T$ کامل است؟

۱۶. فرض کنید $\mathcal{L}$ زبانی باشد که شامل $\{\cdot, e\}$، زبان نظریه‌ی گروه‌ها، $\mathcal{L}$ ـتئوری $T$ توسیعی از نظریه‌ی گروه‌ها و $\varphi(v)$ یک $\mathcal{L}$ ـفرمول باشد. فرض کنید برای هر $n$ یک $G_n \models T$ و عنصر $g_n \in G_n$ از مرتبه‌ی بزرگتر از $n$ موجود است به طوری که $G_n \models \varphi(g_n)$. نشان دهید که $G \models T$ و $g \in G$ چنان موجودند که $G \models \varphi(g)$ و مرتبه‌ی $g$ نامتناهی است.

۱۷. قرار دهید $\mathcal{L} = \{\cdot, +, <, \circ, ۱\}$. فرض کنید $\mathcal{L}$ ـتئوری $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$، تئوری کامل اعداد طبیعی باشد. نشان دهید $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ و $a \in M$ چنان موجوداند بطوری که $a$ از هر عدد طبیعی بزرگتر است.

۱۸. نشان دهید هر گروه آبلی خالی از تاب $(G,+)$ را می‌توان مرتب خطی کرد به طوری که اگر $a<b$ و $c\leq d$ آنگاه $a+c<b+d$.

۱۹. فرض کنید $\mathcal{M}$ مدلی ناستاندارد برای حساب پئانو و $\varphi(v,\bar{w})$ فرمولی در زبان حساب باشد و نیز $\bar{a}\in M$. همچنین فرض کنید برای هر $n<\omega$ داشته باشیم $\mathcal{M}\models\varphi(n,\bar{a})$. نشان دهید عنصر نامتناهی $c\in M$ موجود است بطوری که $\mathcal{M}\models\varphi(c,\bar{a})$.

۲۰. فرض کنید $\mathcal{M}_{۰},\mathcal{M}_{۱},\mathcal{M}_{۲}$ سه $\mathcal{L}$ ـساختار و $j_i:\mathcal{M}_{۰}\longrightarrow\mathcal{M}_i$ برای $i=۱,۲$ نشانده مقدماتی باشد. نشان دهید $\mathcal{L}$ ـساختار $\mathcal{N}$ و نشاندن‌های مقدماتی $f_i:\mathcal{M}_i\longrightarrow\mathcal{N}$ موجودند به طوری که $f_{۱}oj_{۱}=f_{۲}oj_{۲}$.

۲۱. نشان دهید دو عبارت زیر با هم معادلند:

الف) فرمول عمومی $\psi(\bar{v})$ موجود است به طوری که $T\models\forall\bar{v}(\phi(\bar{v})\leftrightarrow\psi(\bar{v}))$.

ب) اگر $\mathcal{M}\subset\mathcal{N}$ دو مدل برای تئوری $T$ باشند، $\bar{a}\in M$ و $\mathcal{N}\models\phi(\bar{a})$، آنگاه $\mathcal{M}\models\phi(\bar{a})$.

۲۲. فرض کنید $T$ یک نظریه و $T_{\forall}=\{\phi|T\models\phi$ و $\phi$ یک جمله‌ی عمومی است$\}$. نشان دهید $\mathcal{A}\models T_{\forall}$ اگر و تنها اگر مدلی برای $T$ مانند $\mathcal{M}$ موجود باشد به طوری که $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}$.

۲۳. فرض کنید $T$ تئوری گروه‌های آبلی‌ای باشد که مرتبه‌ی هر عضو ۲ است. نشان دهید که این تئوری برای هر کاردینال نامتناهی $\kappa$، $\kappa$ ـجازم است ولی کامل نیست. تئوری $T\subset T'$ را چنان بیابید که کامل باشد و همچنین مدل‌های نامتناهی آن، همان مدل‌های نامتناهی $T$ باشد.

۲۴. ثابت کنید تئوری گراف‌های تصادفی کامل است.

۲۵. فرض کنید زبان $\mathcal{L}$ شمارا و $T$ یک $\mathcal{L}$ ـتئوری باشد. همچنین $\mathcal{M}\equiv\mathcal{N}$ مدل‌هایی اشباع از تئوری باشند به طوری که $|M|=|N|$. نشان دهید $\mathcal{M}\cong\mathcal{N}$.
**نتیجه:** مدل اشباع هر تئوری کامل از اندازه‌ی $\kappa$، برای هر کاردینال نامتناهی $\kappa$، در حد ایزومرفیسم یکتاست.

۲۶. فرض کنید $U$ فرافیلتر فرشه روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد و $\mathcal{M}_i=\mathcal{M}$. نشان دهید فراتوان $\dfrac{\Pi\mathcal{M}_i}{U}$ یک ساختار $\aleph_{۱}$ـاشباع است.

۲۷. نشان دهید تئوری $T$، $\aleph_{۰}$ ـجازم است اگر و تنها اگر $|S_n(T)|<\infty$ برای هر عدد طبیعی $n$.

۲۸. نشان دهید تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری دارای مدل اشباع نیست.

۲۹. فرض کنید $s(x)=x+۱$. نشان دهید

الف) ساختار $(\mathbb{N},s)$ دارای حذف سور نیست.

ب) ساختار $(\mathbb{N},s,<)$ سورها را حذف می‌کند.

۳۰. نشان دهید که در ساختار $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ فرمول $\exists y y+y=x$ معادل بدون‌سور ندارد.

۳۱. فرض کنید $K\models ACF$ و $V\subset K^n$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی باشد. مجموعه‌ی $V$ را تحویل‌ناپذیر گویند هرگاه مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی $F_{۰},F_{۱}\subsetneq V$ را نتوان یافت به طوری که $V=F_{۰}\cup F_{۱}$.

الف) نشان دهید $V$ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $I(V)$ ایده‌آل اول باشد.

ب) فرض کنید $V\subset K^n$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی تحویل‌ناپذیر باشد، $K\prec F$ و $\phi(\bar{v})$ فرمولی باشد که $V$ را تعریف می‌کند. فرض کنید $V(F)\subset F^n$ مجموعه‌ی تعریف شده توسط $\phi(\bar{v})$ در $F$ باشد. نشان دهید که $V(F)$ نیز تحویل‌ناپذیر است.

ج) نشان دهید برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی $V$، مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی تحویل‌ناپذیر $V_{۱},\dots,V_n$ موجودند به طوری که $V=V_{۱}\cup\dots\cup V_n$ و اگر مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی تحویل‌ناپذیر $W_{۱},\dots,W_m$ موجود بودند که $V=W_{۱}\cup\dots\cup W_m$، در این صورت $m=n$ و $\{V_{۱},\dots,V_n\}=\{W_{۱},\dots,W_m\}$.