

امتحان منزل بر میانترم درس مبانی منطق و نظریه مجموعه ها

مهلت تحویل: جمعه ۷ دی - ساعت ۲۳:۵۵

توجه. پاسخ دادن به این سوالات اختیاری است و هر کدام از این سوالات می توانند به تشخیص مدرس به عنوان یکی یا دو تا از سوالات امتحان میانترم جایگزین شوند. تنها پاسخهای کامل، که منعکس کننده ی فهم شما از درس باشند، قابل قبول خواهند بود. حضور در سر جلسه ی امتحان میانترم، در هر صورت اجباری است. تأکید می کنم که این سوالات تنها برای دانشجویانی است که حل سوال مشکلتر در منزل را به حل سوالات آسانتر در سر جلسه امتحان ترجیح می دهند.

سوال ۱ با استفاده از قضیه ی فشردگی در منطق مرتبه ی اول نشان دهید که هر گروه آبلی بدون تاب، ترتیب پذیر است. منظور از یک گروه بدون تاب، گروهی است که برای هر عنصر x در آن و برای هر عدد طبیعی داشته باشیم $nx \neq 0$. دقت کنید که گروهی را مرتب می نامیم که ترتیب روی آن، با اعمال جمع و ضرب گروه سازگار باشد.

سوال ۲ ثابت کنید گراف های همبند قابل اصل بندی در منطق مرتبه ی اول نیستند؛ یعنی نمی توان یک تئوری T نوشت که مدلهای آن دقیقاً گرافهای همبند باشند. منظور از یک گراف همبند، گرافی است که بین هر دو رأس آن یک مسیر متناهی وجود داشته باشد.

سوال ۳ کلاس C از L - ساختارها را اصل پذیر می نامیم هرگاه یک تئوری T وجود داشته باشد، به طوری که

$$C = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models T\}.$$

کلاس C را متناهیاً اصل پذیر می نامیم هرگاه تئوری T در بالا متناهی باشد. ثابت کنید کلاس C از L ساختارها متناهیاً اصل پذیر است هرگاه کلاسهای C, C^c اصل پذیر باشند.

سوال ۴ قضیه ی فشردگی در منطق گزاره ها را با استفاده از قضیه ی فشردگی در منطق مرتبه ی اول، ثابت کنید. (برای این منظور، برای هر گزاره ی p در منطق گزاره ها، یک محمول تک موضعی $p(x)$ در زبان مرتبه ی اول مورد نظرتان در نظر بگیرید.)