جلسه ی بیست و هفتم

در اکثر اثباتهای جلسه‌ی قبل از قضیه‌ی بازگشت، بی آن که نام آن را بیاوریم استفاده کردیم. یادآوری می‌کنم که منظور از یک تابعال، تابعی تعریف پذیر از کلاس همه‌ی مجموعه‌ها به کلاس همه‌ی مجموعه‌ها است. تابعی چون f را تعریف‌پذیر می‌نامیم هرگاه فرمولی چون $\phi(x,y,\bar{z})$ و مجموعه‌های $\bar{a}$ موجود باشند به طوری که

$$\{(x,f(x))|x\in V\}=\{(x,y)|x,y\in V\wedge\phi(x,y,\bar{a})\}.$$

اگر F یک تابعال و a یک مجموعه باشند، آنگاه با $f[a]$ مجموعه‌ی زیر را نشان می‌دهیم:

$$\{f(x)|x\in a\}.$$

گفتیم که اگر α یک اردینال باشد، آنگاه

$$\alpha=\{\beta\in On\mid\beta\in\alpha\}$$

قضیه ۱ (بازگشت)**.** فرض کنید $G:V\to V$ یک تابعال (تعریف پذیر) باشد. آنگاه یک تابعال $F:On\to V$ موجود است به طوری که

$$\forall\alpha\in On\ \ F(\alpha)=G(F[\alpha])$$

که همان گونه که در بالا گفتیم: $F[\alpha]=\{F(\beta)\mid\beta\in\alpha\}$

اثبات. نخست ادعا می‌کنیم که برای هر اردینالِ α یک تابع **یکتای** $F_\alpha:\alpha\to V$ موجود است به طوری که

$$\forall\beta\in\alpha\ \ F_\alpha(\beta)=G(F_\alpha[\beta])\qquad(*)$$

نخست یکتایی یک تابعِ این‌چنین را ثابت می‌کنیم. فرض کنید F_α^1وF_α^2 دو تابع باشند به صورت زیر

$$F_\alpha^i:\alpha\to V$$

که هر دو در شرط $*$ صدق کنند. فرض کنید $\beta\in\alpha$ اولین اردینالی باشد که در آن

$$.F_\alpha^1(\beta)\neq F_\alpha^2(\beta)$$

بنابراین برای تمام $\beta'\in\beta$ داریم

$$F_\alpha^1(\beta')=F_\alpha^2(\beta')$$

یعنی

$$F_\alpha^1[\beta]=F_\alpha^2[\beta]$$

پس

$$.F_\alpha^1(\beta)=G(F_\alpha^1[\beta])=F_\alpha^2(\beta)$$

حال وجود تابعهای F_α را با استقراء فرامتناهی روی اردینالها ثابت می‌کنیم. برای اردینالِ صفر حکم برقرار است. فرض کنید $\alpha = \beta + ۱$ یک اردینال تالی باشد. بنا به فرض استقراء، تابعِ F_β موجود است. تعریف می‌کنیم

$$F_\alpha = F_\beta \cup \{(\beta, G(F[\beta]))\}$$

اگر α یک اردینال حدی باشد و برای هر $\beta \in \alpha$ تابعِ F_β موجود باشد، تعریف می‌کنیم

$$F_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} F_\beta.$$

دقت کنید که این که از یک اردینالِ α تابعی تعریف پذیر با ویژگی‌های خواسته شده در قضیه موجود است، در زبان مرتبه‌ی اول قابل بیان است؛ یعنی عبارت زیر یک عبارت مرتبه‌ی اول است.

$$\forall \alpha \in On \ \ \exists ! F_\alpha : \alpha \to V$$
$$\forall \beta \in \alpha \ \ F(\beta) = G(F[\beta])$$

حال قرار دهید

$$F = \bigcup_{\alpha \in On} F_\alpha : On \to V$$

تابع بالا دارای ویژگی مورد نظر قضیه است. دقت کنید که تابع بالا تعریف پذیر (پس یک تابعال) است:

$$(x, y) \in F \leftrightarrow \exists \alpha \in On$$
$$(x, y) \in F_\alpha$$

□

فرض کنید α یک اردینال باشد و $S \subseteq \alpha$. روی S همان ترتیبِ α را اعمال کنید. در این صورت S با یک اردینالِ β ایزومرف است. ادعا می‌کنیم که در این صورت:

لم ۲. $\alpha = \beta$ یا $\beta \in \alpha$.

اثبات. حکم را با استقراء فرامتناهی روی β ثابت می‌کنیم. فرض کنید $S \subseteq \alpha$ تصویرِ ایزومرفِ یک اردینالِ β باشد؛ یعنی یک تابعِ یک به یک و پوشا و حافظِ ترتیبِ $f : \beta \to S \subseteq \alpha$ موجود باشد. فرض کنید حکم برای هر $\beta' \in \beta$ درست باشد. پس از آ نجا که $S' = f[\beta'] \subseteq \alpha$ نتیجه می‌گیریم که یا $\beta' = \alpha$ یا $\beta' \in \alpha$. دقت کنید که $\beta' = \alpha$ نمی‌تواند رخ دهد زیرا $S = f[\beta] \subseteq \alpha$ و برای هر $x \in \alpha$ داریم $f(x) \geq x$. پس برای هر $\beta' \in \beta$ داریم $\beta' \in \alpha$. پس $\alpha = \beta$ یا $\beta \in \alpha$. □

اعمال اصلی روی اردینال ها

اعمال اصلی روی اردینالها، بر پایه‌ی قضیه‌ی بازگشت (قضیه‌ی ۱) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

جمع اردینالها.

قدم اول.

$$\alpha + ۰ = \alpha$$

مرحله ی تالی.

$$\alpha + (\beta + ۱) = S(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) + ۱$$

مرحله ی حدی. اگر γ یک اردینال حدی باشد، تعریف می کنیم

$$\alpha + \gamma = \bigcup_{\beta \in \gamma} \alpha + \beta$$

توجه ۳. داریم $\omega = \bigcup_{n\in\omega} ۱ + n = \omega = ۱ + \omega$ ولی $\omega + ۱ = s(\omega) > \omega$ پس $\omega + ۱ \neq ۱ + \omega$.

ضرب اردینالها.

$$\alpha.۰ = ۰$$
$$\alpha.(\beta + ۱) = \alpha.\beta + \alpha$$
$$\alpha.\gamma = \bigcup_{\beta \in \gamma} \alpha.\beta \qquad (\gamma \text{یک اردینال حدی})$$

توجه ۴. به عبارات زیر توجه کنید.

$$۲.\omega = \bigcup_{n\in\omega} ۲.n = \bigcup_{n\in\omega} n = \omega$$
$$\omega.۲ = \omega.(۱ + ۱) = \omega + \omega$$
$$\Rightarrow ۲.\omega \neq \omega.۲$$

توان‌رسانی اردینالها.

$$\alpha^{۰} = \underline{۱}$$
$$\alpha^{\beta + ۱} = (\alpha^{\beta}).\alpha$$
$$\alpha^{\gamma} = \bigcup_{\beta \in \gamma} \alpha^{\beta} \qquad (\gamma \text{یک اردینال حدی})$$

توجه ۵. به عبارات زیر نیز توجه کنید.

$$۲^{\omega} = \bigcup_{n\in\omega} ۲^{n} = \omega$$
$$\omega^{۲} = \omega^{۱+۱} = \omega.\omega$$

اعداد اصلی (کاردینال ها)

دیدیم که در تعریف اردینال، ترتیب نقش اساسی را بازی می‌کند و ترتیبِ روی اردینالها همان رابطه‌ی تعلق است. اگر ترتیب روی اردینالها در نظر گرفته نشود، بسیاری از آنها با هم، **هم‌اندازه** هستند.

فرض کنید b و a دو مجموعه باشند. می‌نویسیم

$$|a| = |b|$$

هرگاه تابعی یک‌به‌یک و پوشا از a به b موجود باشد. رابطه‌ی $|a| = |b|$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در کلاس تمام مجموعه‌هاست. به هر کلاس هم‌ارزی در این رابطه، یک **عدد اصلی** یا **کاردینال** گفته می‌شود.

قبلاً ثابت کردیم که هر روی هر مجموعه، می‌توان یک ترتیب تعریف کرد که آن را خوش‌ترتیب کند. پس می‌توان به عنوان نماینده‌ی کلاس $|a|$ کوچکترین اردینالی را در نظر گرفت که با a هم‌اندازه است.

روی کاردینالها، ترتیبی بدین صورت تعریف می‌کنیم: $|a| \leq |b|$ هرگاه تابعی یک به یک از a به b موجود باشد.

لم ۶. فرض کنید α, β به ترتیب کوچکترین اردینالهای هم‌اندازه با a, b باشند. آنگاه $|a| \leq |b|$ اگروتنهااگر $\alpha \leq \beta$.

اثبات. اگر $|\alpha| \leq |\beta|$ آنگاه تابع شمول از α به β تابعی یک‌به‌یک است، بنابراین تابعی یک به یک از a، که هم‌اندازه‌ی α است، به b که هم‌اندازه‌ی β است موجود است.

از طرف دیگر، اگر از a به b تابعی یک به یک موجود باشد آن‌گاه تابعی یک به یک، فرضاً f، از α به β موجود است. تصویرِ f را با S نشان دهید و از لمِ ۲ استفاده کنید. $\square$

در درس مبانی ریاضی، تحت عنوان قضیه‌ی شرودرــ برنشتاین، ثابت کردیم که اگر از a به b تابعی یک به یک موجود باشد، و از b به a نیز یک تابع یک به یک موجود باشد، آنگاه تابعی یک به یک و پوشا میان a و b موجود است. بنابراین اگر $|a| \leq |b|$ و $|b| \leq |a|$ آنگاه $|a| = |b|$. اثباتی که در این درس برای این گفته ارائه کردیم، به لطف آشنائی با اردینالها، بسیار ساده‌تر است؛ البته ناگفته نماند که در آن اثبات (که در جزوه‌ی مبانی ریاضی‌ام موجود است) از اصل انتخاب استفاده نشده بود، ولی اثبات زیر، مبتنی بر اصل خوش‌ترتیبی (و از این رو بر اصل انتخاب) است. یاد گرفتن آن اثبات را به صورت تمرین در زیر به عهده‌ی شما گذاشته‌ام.

تمرین ۱. قضیه ی شرودرــ برنشتاین را بدون استفاده از اصل انتخاب ثابت کنید.

قضیه ۷ (شرودرــ برنشتاین)**.** اگر $|a| \leq |b|$ و $|b| \leq |a|$ آنگاه $|a| = |b|$.

اثبات. فرض کنید α, β به ترتیب کوچکترین اردینالهای هم‌اندازه با a, b باشند. بنا به لم ۶ داریم $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$؛ پس بنا به ویژگیهای اردینالها، $\alpha = \beta$. و این بوضوح نتیجه می‌شود که $|a| = |b|$. $\square$

تعریف ۸. نماینده‌ی کلاسِ $|\omega|$ را با $\aleph_0$ (الفْ‌صفر) نمایش می‌دهیم. به طور کلی، وقتی می‌گوییم $\kappa = |a|$ یعنی κ اولین اردینالی است که هم‌اندازه با a است. [1] مجموعه‌ی a را متناهی می نامیم هرگاه $|a| < \aleph_0$. مجموعه‌ی a را شمارای نامتناهی می‌نامیم هرگاه $|a| = \aleph_0$؛ و a را ناشمارا می‌نامیم هرگاه $|a| > \aleph_0$.

این که نامتناهی‌ها نیز دارای اندازه‌های متفاوت هستند، کشفی از کانتور بود که پذیرش آن برای همعصران او چندان آسان نبود. همچنین قضیه‌ی زیر از کانتور، بیانگر این است که از هر نامتناهی، یک نامتناهی بزرگتر پیدا می‌شود. پس نامتناهی‌ها (اگر وجود داشته باشند) به طور نامحدود بزرگتر و بزرگتر می‌شوند.

قضیه ۹ (کانتور)**.** برای هر مجموعه‌ی a داریم

$$|a| < |P(a)|;$$

یادآوری می‌کنم که $P(a)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های a است.

[1] $\aleph$ حرف اول الفبایِ عبری است.

اثبات. واضح است که یک تابع یک به یک از a به $P(a)$ موجود است.

$$x \mapsto \{x\}$$

ادعا می‌کنیم که چنین تابعی نمی‌تواند پوشا باشد.

فرض کنید $f : a \to P(a)$ یک‌به‌یک و پوشا باشد. مجموعه‌ی زیر باید توسط تابع f پوشیده شود:

$$c = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}.$$

پس

$$\exists b \in a \quad f(b) = c = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$$

داریم:

$$b \in f(b) \leftrightarrow b \notin f(b)$$؛

و این تناقض است. □

پس، اندازه‌ی تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه، اکیداً بیشتر از اندازه‌ی خودِ آن مجموعه است. اگر a یک مجموعه باشد، آنگاه متناظر با هر زیرمجموعه از a می‌توان یک تابع از a به مجموعه‌ی $\{۰, ۱\} = \underline{۲}$ در نظر گرفت. اگر $b \subseteq a$ آنگاه تابع $f_b : a \to \{۰, ۱\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_b(x) = ۱ \leftrightarrow x \in b.$$

بنابراین $|P(a)|$ برابر است با اندازه‌ی مجموعه‌ی متشکل از تمام توابعِ از مجموعه‌ی a به مجموعه‌ی $\underline{۲}$. بدین علت می‌نویسیم که برای یک کاردینالِ a داریم

$$|P(a)| = ۲^{|a|}.$$

مجموعه‌ی $\underline{۲}^a$ را همچنین می‌توان به عنوان مجموعه‌های دنباله‌های صفرویکی به طول $|a|$ در نظر گرفت.

دقت کنید که هر دنباله‌ی شمارا از صفرویک را می‌توان بسطِ در مبنای دوی یک عدد حقیقی در نظر گرفت. از این رو

$$۲^{\aleph_۰} = |\mathbb{R}|.$$

همچنین دقت کنید که $۲^{\aleph_۰}$ را می‌توان تعداد تمام شاخه‌های درختی در نظر گرفت که روی هر گره آن یک دنباله‌ی متناهی از صفر و یک نشسته است.

تا این جا با چندین کاردینال غیر هم‌اندازه آشنا شده‌ایم: کاردینالهای متناهی، کاردینالِ الف‌صفر و کاردینالِ $۲^{\aleph_۰}$. به طور خلاصه، اگر $m, n \in \omega$ آنگاه $|n| = |m|$ اگروتنهااگر $m = n$. از طرفی $|\omega| = \aleph_۰$ و $|P(\omega)| = ۲^{\aleph_۰}$.

قضیه ۱۰. فرض کنید a یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد. آنگاه

$$|a \times a| = |a|$$

منظور از $a \times a$ حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ی a در خودش است.

اثبات. فرض کنید α کوچکترین اردینالِ هم‌اندازه با a باشد. قضیه را با استقراء فرامتناهی روی α ثابت خواهیم کرد.
دقت کنید که قدم اول استقراء در اینجا $\alpha = \omega$ است. پس ابتدا باید نشان دهیم که

$$|\omega \times \omega| = |\omega|.$$

واضح است که $|\omega| \leq |\omega \times \omega|$. برای اثباتِ این که $|\omega \times \omega| \leq |\omega|$ یک اردینالِ هم‌اندازه با $\omega \times \omega$ پیدا می‌کنیم و نشان می‌دهیم که آن اردینال از ω کمتر است.
روی $\omega \times \omega$ ترتیب زیر را تعریف کنید:

$$(m,n) < (m',n') \Leftrightarrow (max(m,n),m,n) <_{\text{ترتیب قاموسی}} (max(m',n'),m',n')$$

به عنوان یک تمرین ساده، نشان دهید که با ترتیب بالا $\omega \times \omega$ خوش‌ترتیب است. بنابراین $\omega \times \omega$ با این ترتیب، با یک اردینالِ γ در تناظر یک‌به‌یکِ ترتیبی است. برای این که نشان دهیم که اردینالِ γ از ω بیشتر نیست، (از آنجا که هر اردینال مجموعه‌ی اردینالهای قبل از خودش است) کافی است نشان دهیم که هر اردینالی که از γ کمتر است، متناهی است.
فرض کنید $\beta \in \gamma$. آنگاه β متناظر با یک زوجِ $(m,n) \in \omega \times \omega$ است. با ترتیبِ بالا، تعداد عناصری که از (m,n) کمتر هستند، حداکثر برابر با $\max m,n \cdot \max m,n$ است و از این رو متناهی است.
برای اثبات قضیه برای اردینالِ دلخواهِ α نیز به صورت مشابه عمل می‌کنیم. روی $a \times a$ ترتیبی مشابه ترتیب بالا تعریف می‌کنیم. فرض کنید $a \times a$ متناظر با اردینالِ γ باشد. اگر $\beta \in \gamma$ آنگاه β متناظر با یک عنصرِ $(c,d) \in a \times a$ است. فرض کنید $c = \max c,d$. بنا به فرض استقراء داریم $|c \times c| = |c|$. همچنین اندازه‌ی مجموعه‌ی عناصرِ کمتر یا مساویِ (c,d) برابر با $|c \times c| = |c|$ است. پس $c \leq a$. $\square$

نتیجه ۱۱.
- $|\omega + \underline{n}| = |\omega| = \aleph_0$؛ زیرا می‌توان به راحتی نگاشتی یک به یک از $\omega + n \to \omega \times \omega$ پیدا کرد.
- $\omega + \omega = \bigcup \omega + n$. از $\omega + \omega$ نیز به راحتی می‌توان نگاشتی یک به یک به $\omega \times \omega$ تعریف کرد. پس $|\omega \cdot ۲| = |\omega + \omega| = \aleph_0$.
- به همین ترتیب برای هر $n \in \omega$ داریم $|\omega \cdot \underline{n}| = \aleph_0$.
- پس، اندازه‌ی همه‌ی اردینالهای زیر برابر با الف‌صفر است:

$$\omega, \omega + ۱, \ldots, \omega + \omega, \omega \cdot \underline{۳}, \ldots, \omega \cdot \omega, \ldots, \omega^۳, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

اندازه‌ی همه‌ی اردینالهای بالا برابر با الف‌صفر است؛ ولی می‌دانیم که اندازه‌ی اردینالی که با مجموعه‌ی $|P(\omega)|$ هم‌اندازه است، اکیداً از الف‌صفر بیشتر است. این اردینال را با $۲^{\aleph_0}$ نشان می‌دهیم.[۲] سوال طبیعی اینجاست که اولین گذار به اردینالی با اندازه‌ی اکیداً بزرگتر از الف‌صفر در کجا اتفاق می‌افتد. به بیان دیگر، اولین اردینالی که از لحاظ اندازه اکیداً از الف‌صفر بزرگتر است، کدام است. اندازه‌ی این اردینال را با $\aleph_1$ نشان می‌دهیم. اما یک حدس معروف، به نام «فرضیه‌ی پیوستار» بیانگر این است که بین اندازه‌ی $\aleph_0$ و اندازه‌ی $۲^{\aleph_0}$ هیچ اندازه‌ی وجود ندارد.

فرضیه‌ی پیوستار

$$\aleph_1 = ۲^{\aleph_0}.$$

[۲] دقت کنید که این اردینال، اردینالِ ۲^ω نیست. متأسفانه این نمادگذاری‌ها کمی گیج‌کننده است. برای ما، ۲^ω اگر منظور توانرسانی اردینالها باشد برابر با ω است. از طرفی $۲^{\aleph_0}$ برابر است با اندازه‌ی مجموعه‌ی $p(\omega)$. این مجموعه، هم‌اندازه با مجموعه‌ی $\{\underline{۰},\underline{۱}\}^\omega$ است.

فرضیه‌ی پیوستار در منطق مرتبه‌ی اول قابل بیان است. پس یک سوال طبیعی این است که آیا

$$ZFC \vdash \aleph_1 = 2^{\aleph_0}.$$

ثابت شده است (کوهن و گودل) که نه فرضیه‌ی پیوستار در زدافسی قابل‌اثبات است و نه نقیض آن؛ یعنی، فرضیه‌ی پیوستار از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها مستقل است. این نکته ما را به پایان درس نزدیکتر می‌کند.

مختصری درباره‌ی قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل

پیش از آنکه وارد بحث درباره‌ی قضیه‌ی ناتمامیت شوم، لازم می‌دانم آنچه را که در طول این ترم دیدیم به سرعت مرور کنم. گفتیم که اصول اولیه حاکم بر فکر ریاضی، منطق گزاره‌هاست؛ اما بنای ریاضیات نیازمند منطقی جامعتر به نام منطق مرتبه‌ی اول است. هر چه در این منطق ثابت می‌شود درست است و هر چه درست باشد در آن اثبات پذیر است. در این منطق می‌توان بسیاری پدیده‌های ریاضی را اصل‌بندی کرد. پس باید تلاش کرد که یک اصل‌بندی جامع برای تمام ریاضیات در این منطق ارائه شود. از آنجا که بسیاری پدیده‌های ریاضی، به نوعی مجموعه هستند، برای اصل‌بندی ریاضیات کافی است نظریه‌ی مجموعه‌ها اصل‌بندی شود. مجموعه‌ی اصول زدافاسی سیستم کارآمدی برای اصل‌بندی ریاضیات است. بسیاری تناقضات اولیه، مانند پاردوکس راسل در زدافسی به راحتی برطرف شده‌اند. با این حال دو پرسش مهم را باید درباره‌ی این اصول پرسید.

- آیا ممکن است این اصول منجر به یک تناقض شوند؟ یعنی آیا ممکن است که گزاره‌ای به نام ϕ پیدا شود، به طوری که

$$ZFC \vdash \phi \wedge \neg\phi.$$

  بنا به قضیه‌ی فشردگی، منجر نشدن زدافسی به تناقضات، معادل با وجود یک مدل برای آن است. پس این سوال را می‌توان بدین گونه فرمولبندی کرد: آیا زدافسی دارای مدل است؛ یعنی آیا جهانی به نام جهان نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌تواند وجود داشته باشد؟

- آیا زدافسی یک اصل‌بندی کامل برای ریاضیات است؛ یعنی آیا زدافسی اینچنین است که برای هر جمله‌ی دلخواهِ ϕ در نظریه‌ی مجموعه‌ها داشته باشیم $ZFC \vdash \phi$ یا $ZFC \vdash \neg\phi$.

قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل برای پاسخ دادن به سوالهای بالاست. در ادامه‌ی درس، صورت این قضیه و اثباتی برای آن را به صورتی کاملاً حداقلی بیان خواهم کرد تا دانشجویان را با طعمی از آن آشنا سازم. امیدوارم در سریهای آینده تدریس این درس، فرصت برای کامل کردن این اثبات دست دهد.

نخست به هر علامت زبانی در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها یک کد (در خودِ نظریه‌ی مجموعه‌ها) اختصاص دهید:

$$\ulcorner = \urcorner = \{(۰, ۰)\}$$
$$\ulcorner \in \urcorner = \{(۰, ۱)\}$$
$$\ulcorner \wedge \urcorner = \{(۰, ۲)\}$$
$$\ulcorner \neg \urcorner = \{(۰, ۳)\}$$
$$\ulcorner \forall \urcorner = \{(۰, ۴)\}$$
$$\ulcorner \exists \urcorner = \{(۰, ۵)\}$$
$$\ulcorner v_۰ \urcorner = \{(۱, ۰)\}$$
$$\ulcorner v_۱ \urcorner = \{(۱, ۱)\}$$
$$\ulcorner v_۲ \urcorner = \{(۱, ۲)\}$$
$$\vdots$$

به همین ترتیب، به یک فرمولِ

$$\phi = \zeta_۱ \ldots \zeta_n$$

یک کد به صورت زیر نسبت داده می‌شود:

$$\ulcorner \phi \urcorner = \{(۰, \ulcorner \zeta_۱ \urcorner), \ldots (n, \ulcorner \zeta_n \urcorner)\}$$

همه‌ی فرمولهای قابل اثبات را می‌توان با استفاده از اصول زدافسی و به‌کارگیری روشهای استنتاج ایجاد کرد. فرمولی مرتبه‌ی اول به نام $Bew(x)$ وجود دارد که بیانگر این است که x کُدِ یک فرمولِ قابل اثبات در زدافسی است.

لم ۱۲ (قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت تارسکی)**.** برای هر فرمولِ $\sum(x)$ یک جمله‌ی ϕ موجود است به طوری که

$$ZFC \vdash \sum(\ulcorner \phi \urcorner) \leftrightarrow \phi.$$

طرح اثبات. یک تابعال تعریف پذیرِ $f(x, y)$ موجود است به طوری که اگر x کد فرمولِ ϕ و y کد فرمولِ ψ باشد، آنگاه $f(x, y)$ کد فرمولِ $\phi(\ulcorner \psi \urcorner)$ را به دست می‌دهد.

قرار دهید $\psi(x) = \sum(f(x, x))$. قرار دهید $\phi = \psi(\ulcorner \psi \urcorner)$ و بررسی کنید که این فرمول خواسته‌ی قضیه را برآورده می‌کند. □

فرض کنید F یک فرمول همواره غلط باشد؛ برای مثال فرض کنید $F = \neg(x = x)$. قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل بیانگر این است که از زدافسی تناقض ندهد، آنگاه کامل نیست؛ یعنی جمله‌ای پیدا می‌شود که در زدافسی قابل اثبات نیست.

قضیه ۱۳ (قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل)**.** اگر ZFC سازگار باشد، آنگاه

$$ZFC \nvdash Con_{ZFC}.$$

اثبات. بنا به قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت تارسکی، یک جمله‌ی ϕ وجود دارد به طوری که

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner). \quad *$$

ادعا می‌کنم که با فرض سازگاریِ زداف‌سی داریم:

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow Con_{ZFC}.$$

پیش از اثبات این ادعا، توجه کنید که اگر ادعا ثابت شود، آنگاه حکم مورد نیاز قضیه ثابت می‌شود؛ زیرا با فرض درست بودن ادعا اگر $ZFC \vdash Con_{ZFC}$ آنگاه $ZFC \vdash \phi$. پس (بنا به ویژگی‌های رابطه‌ی Bew) داریم

$$ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner). \quad **$$

از طرفی از $ZFC \vdash \phi$ بنا به $*$ نتیجه می‌شود که

$$ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \quad ***$$

اما $**$ و $***$ با فرض سازگاری زداف‌سی تناقض می‌دهند.

تنها چیزی که مانده است اثبات شود، ادعای بالاست. نخست نشان می‌دهیم که

$$ZFC \vdash \phi \rightarrow Con_{ZFC}.$$

نخست توجه کنید که $ZFC \vdash F \rightarrow \phi$. بنابراین $ZFC \vdash Bew\ulcorner F \urcorner \rightarrow Bew\ulcorner \phi \urcorner$. یعنی $ZFC \vdash \neg Con_{ZFC} \rightarrow Bew\ulcorner \phi \urcorner$. پس بنا به $*$

$$ZFC \vdash \neg Con_{ZFC} \rightarrow \neg \phi$$

و این همان است که می‌خواهیم.

در ادامه ثابت می‌کنیم

$$ZFC \vdash Con_{ZFC} \rightarrow \phi.$$

داریم

۱. $ZFC \vdash \phi \rightarrow \neg Bew\ulcorner \phi \urcorner$ پس

۲. $ZFC \vdash Bew\ulcorner \phi \urcorner \rightarrow Bew\ulcorner \neg Bew\ulcorner \phi \urcorner \urcorner$ پس

۳. $ZFC \vdash Bew\ulcorner \phi \urcorner \rightarrow Bew(\ulcorner \neg Bew\ulcorner \phi \urcorner \urcorner \wedge Bew(\ulcorner Bew\ulcorner \phi \urcorner \urcorner))$ اما داریم

۴. $ZFC \vdash Bew\ulcorner \neg Bew\ulcorner \phi \urcorner \urcorner \wedge Bew\ulcorner Bew\ulcorner \phi \urcorner \urcorner \rightarrow Bew\ulcorner F \urcorner$ پس

۵. $ZFC \vdash Bew\ulcorner \phi \urcorner \rightarrow \neg Con_{ZFC}$ و از این رو

۶. $ZFC \vdash Con_{ZFC} \rightarrow \phi$.

□