۱ جلسه‌ی بیست وسوم

دو اصل دیگر از نظریه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها مانده است که در این جلسه، آنها را اجمالاً معرفی می‌کنم و در جلسات بعدی درباره‌ی آنها بیشتر صحبت خواهم کرد.

اصل ۱ (وجود مجموعه‌ی نامتناهی)**.** این اصل بیانگر این است که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد. بیان رسمی این اصل به صورت زیر است:

$$\exists z \quad (\emptyset \in z \wedge \forall x \in z \quad x \cup \{x\} \in z)$$

پس مجموعه‌ای که در اصل بالا وصف شده است، شامل همه‌ی مجموعه‌های زیر است:

$$\emptyset$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\vdots$$

اصل ۲ (اصل انتخاب)**.** بنا به اصل انتخاب، اگر مجموعه‌ای متشکل از مجموعه‌های ناتهی داشته باشیم، تابعی (به نام تابع انتخاب) وجود دارد که از هر یک از اعضای این مجموعه عضوی برمی‌دارد. بیان رسمی این اصل به صورت زیر است:

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \ \exists f : x \rightarrow \bigcup x \quad \forall t \in x \ \ f(t) \in t)$$

دقت کنید که اعضای x هر کدام یک مجموعه هستند و تابع f در بالا از هر کدام از مجموعه‌های موجود در x عنصری برمی‌دارد.

دقت کنید که این که تابعی مانند f موجود است، قابل بیان در منطق مرتبه‌ی اول است. برای بیان آن باید گفت که یک زیرمجموعه از $x \times \bigcup x$ موجود است که ویژگی تابع بودن را داراست.

در جلسات آینده درباره‌ی اصل انتخاب و صورتهای معادل آن بیشتر توضیح خواهم داد. در ادامه‌ی این جلسه، به اعداد طبیعی خواهیم پرداخت. پیش از آن به دانشجویان پیشنهاد می‌کنم که برای فهم دقیقترِ اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها، حتماً تمرین زیر را حل کنند.

تمرین ۱. فرض کنید $\mathcal{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های متناهیِ اعداد طبیعی باشد. این مجموعه، همان طور که از درس مبانی ریاضی می‌دانید، شماراست، پس در تناظر یک‌به‌یک با $\mathbb{N}$ است. فرض کنید β یک تناظر یک‌به‌یک بین $\mathbb{N}$ و $\mathcal{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ باشد. روی $\mathbb{N}$ رابطه‌ی $\in_\beta$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$x \in_\beta y \Leftrightarrow x \in \beta(y).$$

حال ساختارِ $(\mathbb{N}, \in_\beta)$ را در نظر بگیرید و به تمرینهای زیر درباره‌ی آن جواب دهید.

۱. کدام اصولِ زدافسی در این ساختار درست هستند؟

۲. نشان دهید که اگر β را نگاشت زیر در نظر بگیریم، آنگاه هر مجموعه در $(\mathbb{N}, \in_\beta)$ خوش‌بنیاد است.

$$\beta(۲^{n_۱} + \ldots ۲^{n_k}) = \{n_۱, \ldots, n_k\}.$$

۳. β را به گونه‌ای تعریف کنید که در $(\mathbb{N}, \in_\beta)$ اصل انتظام درست **نباشد.**

۴. β را به گونه‌ای تعریف کنید که در $(\mathbb{N}, \in_\beta)$ اصل انتظام درست باشد، ولی درعین حال یک مجموعه‌ی غیرخوش‌بنیاد پیدا شود.

۱.۱ اعداد طبیعی

اعداد طبیعی را همه می‌شناسند:

$$\mathbb{N} = \{۰, ۱, \ldots\}.$$

این را نیز همه می‌دانند که اگر حکمی برای ۰ درست باشد و از درست بودن آن برای n درستی آن برای $n+۱$ نتیجه شود، آنگاه این حکم برای «تک‌تک‌اعدادِطبیعی» درست است. اما آنچه در ادامه بدان پرداخته‌ایم این است که ZFC درباره‌ی اعداد طبیعی چه فکر می‌کند. به بیان دیگر می‌خواهیم بدانیم که حقایق مربوط به اعداد حقیقی تا چه حدی در نظریه‌ی مجموعه‌ها قابل بیان و اثبات هستند. نخست چند مجموعه‌ی ساده معرفی می‌کنیم:

$$\underline{۰} = \emptyset$$

$$\underline{۱} = \{\underline{۰}\} = \{\emptyset\}$$

$$\underline{۲} = \{\underline{۰}, \underline{۱}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\underline{۳} = \{\underline{۰}, \underline{۱}, \underline{۲}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\vdots$$

$$\underline{n} = \ldots$$

در ادامه‌ی درس مفهوم اعداد طبیعی را به طور دقیق تعریف کرده‌ایم.

تعریف ۳. مجموعه x را **متعدی** می‌نامیم هرگاه

$$\forall y, z \quad y \in z \in x \to y \in x$$

به بیان دیگر x متعدی است اگروتنهااگر $\bigcup x \subseteq x$. (این را ثابت کنید).

تعریف ۴. فرض کنید a یک مجموعه و $<$ یک رابطه روی a باشند. (یعنی $<$ یک زیر مجموعه از $a \times a$ باشد.) می گوییم $<$ یک رابطه ترتیبی روی a است هرگاه دو مورد زیر برقرار باشند:

۱. $\forall x \in a \quad \neg(x < x)$.

۲. $\forall x, y, z \in a \quad (x < y) \wedge (y < z) \to x < z$.

همچنین می‌گوییم رابطه $<$ یک رابطه ترتیبی خطی است هرگاه علاوه بر دو مورد بالا، مورد زیر نیز برقرار باشد:

۳. $\forall x, y \in a \ (x < y \vee y < x \vee x = y)$.

حال همه‌ی مواد لازم برای تعریف اعداد طبیعی را در دست داریم. در نظریه‌ی مجموعه‌ها، گاهی خودِ رابطه‌ی عضویت، رابطه‌ی ترتیبی می‌شود که این اساس تعریف اعداد طبیعی، و پس از آن اردینالهاست.

تعریف ۵. مجموعه x را یک عدد طبیعی می‌نامیم هرگاه سه مورد زیر برقرار باشند:

۱. x متعدی باشد.

۲. $(x, \in)$ یک مجموعه **مرتب خطی** باشد.

۳. هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از x با ترتیبِ $\in$ دارای یک عنصر مینیمم و یک عنصر ماکسیمم باشد.

توجه کنید که این که x متعدی باشد، با این که رابطه‌ی $\in$ روی x متعدی باشد، دو مطلب متفاوت هستند. اولی یعنی اعضایِ اعضای x عضوِ x باشند. ولی دومی یعنی بین سه عضوِ $t_1, t_2, t_3 \in x$ رابطه‌ی تعدی برقرار باشد؛ و هیچکدام از اینها از دیگری نتیجه نمی‌شود.

در تعریف بالا نیازی نبود که بگوییم هر زیرمجموعه از x دارای مینی‌موم باشد؛ زیرا این از اصل انتظام نتیجه می‌شود. فرض کنید $y \subseteq x$ دارای مینی‌موم نباشد. پس عنصر $x_0 \in y$ برابر با مینی‌مومِ y نیست. پس عنصرِ $x_1 \in x_0$ و به همین ترتیب یک دنباله‌ی

$$x_0 \ni x_1 \ni \dots$$

یافت می‌شود. حال دقت کنید که از $x_0 \ni x_1 \ni x_2$ بنا به متعدی بودن رابطه‌ی $\in$ نتیجه می‌شود که $x_2 \in x_0$. پس همه‌ی x_i ها برای $i \geq 1$ اعضای x_0 هستند. یعنی $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ یک زیرمجموعه از x_0 است، پس یک مجموعه است. اما این با اصل انتظام مغایر است. زیرا برای هر $x_i \in A$ داریم $x_{i+1} \in A \cap x_i$. [1]

لم ۶. در ZFC ثابت می شود که عناصر متعلق به یک عدد طبیعی، عدد طبیعی هستند.

اثبات. فرض کنید x یک عدد طبیعی باشد و $y \in x$. اولاً y متعدی است؛ زیرا رابطه‌ی تعلق روی x متعدی است:

$$z \in u \in y \to z \in y.$$

این که $\in$ روی y رابطه ترتیبی است به آسانی قابل اثبات است. این که هر زیر مجموعه ای از y دارای مینیمم و ماکسیمم است نیز به آسانی ثابت می شود، زیرا هر زیر مجموعه از y یک زیر مجموعه از x است. □

تمرین ۲. نشان دهید که در ZFC هر $\underline{n}$، تعریف‌شده در بالا، یک عدد طبیعی است. این را می‌توانید با استقراء روی اعداد طبیعی نشان دهید. این استفاده از استقراء اشکالی ندارد، در واقع شما در خارج از ZFC از استقراء استفاده کرده‌اید. یعنی نشان داده‌اید که اگر از نظر زدافسی $\underline{n}$ یک عدد طبیعی باشد، آنگاه از نظر زدافسی، $\underline{n+1}$ نیز یک عدد طبیعی است. در ادامه‌ی درس، یک مفهوم برای استقراء را در **خودِ زدافسی** فرمولبندی خواهیم کرد.

تعریف ۷. اگر x یک مجموعه باشد، تعریف می‌کنیم:

$$s(x) = x \cup \{x\}$$

[1] این مسئله‌ی مهمی است. در جلسه‌ی قبل گفتم که اصل انتظام لزوماً خوش‌بنیادی را نتیجه نمی‌دهد، ولی از مجموعه‌ی شدنِ یک گردایه‌ی $x_0 \ni x_1 \ni \dots$ جلوگیری می‌کند. با وجود تعدی، هر دنباله‌ی نزولیِ به صورت یادشده، تشکیل یک مجموعه می‌دهد. پس با وجود تعدی، اصل انتظام، خوش‌بنیادی را نتیجه می‌دهد.

لم ۸. در ZFC ثابت می شود که اگر x یک عدد طبیعی باشد آنگاه $S(x)$ نیز یک عدد طبیعی است.

اثبات. در اینجا فقط تعدی را ثابت می‌کنم و بررسی سایر ویژگی‌ها را به عهده‌ی شما می‌گذارم. اگر $y \in z \in x \cup \{x\}$ آنگاه یا $z \in x$ یا $x = z$. در حالت اول از تعدی x نتیجه می‌شود که $y \in x$ پس $y \in x \cup \{x\}$. در حالت دوم هم مشخص است که $y \in z = x$. پس $y \in x \cup \{x\}$. □

لم ۹. اگر $x \neq \emptyset$ و x یک عدد طبیعی باشد آنگاه یک عدد طبیعی y موجود است به طوریکه $x = y \cup \{y\} = S(y)$؛ به بیان دیگر، هر عدد طبیعیِ ناصفر، تالی یک عدد طبیعی دیگر است.

اثبات. فرض کنید y بزرگترین عنصر متعلق به x باشد که طبق تعریف عدد طبیعی، چنین عنصری موجود است (زیرا $x \subseteq x$ و هر زیرمجموعه از x دارای ماکزیمم است). ادعا می کنیم که $x = y \cup \{y\}$. این که $y \cup \{y\} \subseteq x$ به راحتی ثابت می‌شود. برای اثبات این که $x \subseteq y \cup \{y\}$، دقت کنید که اگر $t \in x$ و $t \notin y$ آنگاه از آنجا که $\in$ روی x یک رابطه ترتیب خطی است یا $y \in t$ یا $y = t$. دقت کنید که این که $y \in t$ با ماکزیمم بودن y در تناقض است. □

تعریف ۱۰. کلاس متشکل از تمام اعداد طبیعی را با ω نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۱. ω یک مجموعه است.

اثبات. نخست دقت کنید که **عدد طبیعی بودن** قابل وصف توسط فرمولهای مرتبه اول در زبان نظریه مجموعه‌هاست. یعنی یک فرمولِ ϕ وجود دارد، به طوری که $\phi(x)$ یعنی x یک عدد طبیعی است. بنا به اصل تصریح، کافی است نشان دهیم که یک مجموعه‌ی t وجود دارد به طوری که $\omega = \{x \in t | \phi(x)\}$. **به بیان دیگر، برای اثباتِ مجموعه بودنِ ω کافی است نشان دهیم که یک مجموعه‌ی t موجود است که ω زیرمجموعه‌ای از آن است.**

اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی را در نظر بگیرید:

$$\exists t(\emptyset \in t) \wedge (\forall u \in t \ \ u \cup \{u\} \in t)$$

بنا به این اصل، یک مجموعه‌ی نامتناهیِ t موجود است. در ادامه نشان خواهیم داد که $\omega \subseteq t$. در واقع با اثبات این گفته ثابت کرده ایم که ω زیر مجموعه تمام مجموعه های استقرایی است (مجموعه‌هایی که شامل تهی هستند و هر x را که شامل باشند، مجموعه‌ی $x \cup \{x\}$ را نیز شاملند).

فرض کنید $\omega \not\subseteq t$. پس فرض کنید $x \in \omega - t$. در این صورت، $s(x) \in \omega$. دقت کنید که $x \in s(x)$ و $x \notin t$. حال فرض کنید که z کوچکترین عنصر در $s(x)$ باشد که $z \notin t$؛ به بیان دیگر $z = \min(s(x) - t)$.

همچنین دقت کنید که $z \neq \emptyset$ زیرا $(\emptyset \in t)$. از آن جا که z یک عدد طبیعی است و $z \neq \emptyset$، یک عدد طبیعی y موجود است به طوریکه $z = s(y) = y \cup \{y\}$. پس $y \in z \in s(x)$. اما این تناقض است، زیرا $y \in s(x) - t$ و $y \in z$ ولی z مینی‌مومِ $s(x) - t$ است.

علت این که $y \notin t$ این است که اگر $y \in t$ آنگاه از آنجا که t در اصل مجموعه‌ی نامتناهی بودن صدق می‌کند، $s(y) \in t$. اما $s(y) = z \notin t$. □

همان طور که گفته شد، در اثبات قضیه‌ی بالا، همچنین ثابت کردیم که ω زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی استقرائی است. اما یک نکته‌ی مهم دیگر نیز درخلال اثبات بالا، ثابت شد:

قضیه ۱۲ (استقراء).

$$ZFC \vdash (x \subseteq \omega \wedge \emptyset \in x \wedge \forall z \in x \;\; s(z) \in x) \rightarrow \omega = x.$$

اثبات. از آنجا که x یک مجموعه‌ی استقرائی است، بنا به اثبات قضیه‌ی قبل داریم $\omega \subseteq x$. حال از آنجا که $x \subseteq \omega$ از این نتیجه می‌شود که $x = \omega$. □

یک سوال طبیعی که در اینجا پیش می‌آید این است که آیا

$$\omega = \{\underline{۰}, \underline{۱}, \underline{۲}, \ldots, \}?$$

دقت کنید که مجموعه‌ی دست راست زیرمجموعه‌ی ω است. پس اگر استقرائی باشد، باید با ω برابر باشد. هر چند با نگاه از بیرون، به نظر می‌رسد که این مجموعه، استقرائی است (هر چه در آن است، بعدیش نیز در آن است) اما در ZFC نمی‌توان ثابت کرد که این مجموعه، استقرائی است. در واقع در ZFC نمی‌توان ثابت کرد که مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن دقیقاً $\{\underline{۰}, \underline{۱}, \ldots\}$ هستند. این گفته در تمرین زیر روشنتر می‌شود.

تمرین ۳. نشان دهید که اگر ZFC سازگار باشد آنگاه ZFC مدلی دارد که در آن اعداد طبیعی غیر استاندارد پیدا می شوند، یعنی یک مدل $\mathfrak{M} \models ZFC$ وجود دارد به طوری که عنصرِ $t \in M$ موجود است، به طوری که $t \in \omega^{\mathfrak{M}}$ ولی برای هر n داریم $t \neq \underline{n}$.