۱ جلسه نوزدهم، آنالیز نااستاندارد و شروع نظریه‌ی مجموعه‌ها

۱.۱ ادامه‌ی کاربردهای قضیه‌ی فشردگی

یکی از ویژگی‌های مهم اعداد حقیقی، ویژگی ارشمیدسی است: هیچ عدد حقیقی r یافت نمی‌شود به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r > n,$$

به بیان معادل هیچ عدد حقیقی‌ای مانند r یافت نمی‌شود به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < r < \frac{1}{n}.$$

و باز به بیان دیگر، در میدان اعداد حقیقی عبارت زیر درست است:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset.$$

ساختار میدان اعداد حقیقی، یعنی ساختارِ $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ را در زبان $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$ در نظر بگیرید. قرار دهید

$$T = Th(\mathfrak{R}) = \{\varphi \mid \mathfrak{R} \models \varphi\}$$

به بیان دیگر، T را تئوری کامل این ساختار گرفته‌ایم؛ یعنی همه‌ی ویژگی‌های مرتبه‌ی اول میدان اعداد حقیقی را در مجموعه‌ی T ریخته‌ایم. واضح است که

$$\mathfrak{R} \models T.$$

اما این تئوری مدلهای دیگری نیز غیر از $\mathfrak{R}$ می‌تواند داشته باشد. هر جمله‌ای که در $\mathfrak{R}$ درست باشد، در هر یک از آن مدلها نیز درست است. طبیعی است سوال زیر را از خود بپرسیم:

سوال ۱. آیا ویژگی ارشمیدسی در مدل‌های دیگر T نیز برقرار است؟

در ادامه به پاسخ این سوال پرداخته‌ایم. یک ثابت c به زبان $\mathcal{L}$ اضافه کنید و قرار دهید:

$$.\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$$

تئوری T' را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$T' = T \cup \{c > 1, c > 1 + 1, c > 1 + 1 + 1, c > 1 + 1 + 1 + 1, \cdots, c > \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}, \cdots\}.$$

ادعا می‌کنیم که T' دارای مدل است. بنا به قضیه‌ی فشردگی، برای اثبات این ادعا، کافی است نشان دهیم که هر بخش متناهی $\triangle \subseteq T'$ دارای مدل است. می‌توان نوشت:

$$\triangle = \triangle' \cup \triangle''$$

به طوری که $\triangle' \subseteq T$ و $\triangle'' \subseteq T$. اگر نشان دهیم مجموعه‌ی $T \cup \triangle''$ دارای مدل است، واضح است که از آن نتیجه می‌شود که $\triangle$ هم دارای مدل است. فرض کنید

$$\triangle'' = \{c > ۱, c > ۱ + ۱, \cdots, c > \underbrace{۱ + \cdots + ۱}_{n}\}$$

ساختار $\mathfrak{R}$ را در نظر بگیرید. تعبیر کنید

$$c^{\mathfrak{R}} = n + ۲$$

آنگاه $\mathfrak{R} \models T \cup \triangle''$. بنابراین هر بخش متناهی از T' دارای مدل است. پس بنا به قضیه‌ی فشردگی T' دارای مدلی به نام $\tilde{\mathfrak{R}}$ است.

دقت کنید که هر جمله‌ای که در مورد ساختار اعداد حقیقی درست باشد، در موردِ $\tilde{\mathfrak{R}}$ نیز درست است. اما علاوه بر این، در $\tilde{R}$ عنصری (همان تعبیر ثابتِ c) موجود است که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر است. واضح است که $\frac{1}{c}$ از تمامِ $\frac{1}{n}$ ها کوچکتر است. پس $\tilde{\mathfrak{R}}$ یک میدان ارشمیدسی نیست. در این میدان، عناصری **بی‌نهایت‌کوچک** و عناصری **بی‌نهایت‌بزرگ** یافت می‌شوند. به بیان دیگر، ارشمیدسی بودن میدان اعداد حقیقی، یک ویژگیِ مرتبه‌ی اول نیست که در تئوری کامل این میدان فرورفته باشد.

مدل $\tilde{\mathfrak{R}}$ را یک **مدل نااستاندارد** برای تئوری اعداد حقیقی می‌نامیم.

آنالیز نااستاندارد، یک گرایش از نظریه‌ی مدل است که در آن مفاهیم آنالیزی در مدلهای نااستاندارد مطالعه می‌شوند. [۱] در زیر برای نمونه به تحلیل مفهوم پیوستگی در آنالیز نااستاندارد پرداخته‌ایم. دقت کنید که در بیان مفهوم پیوستگی، شهودمان این است که وقتی که x **بی‌نهایت** به a نزدیک شود آنگاه $f(x)$ بی‌نهایت به $f(a)$ نزدیک شود. بی‌نهایت نزدیک شدن را در حساب، نیوتون و لایبنیتز به صورت هوشمندانه‌ای فرمول‌بندی کرده‌اند: $f(x)$ به هر **اندازه‌ای که شما بخواهید** به $f(a)$ نزدیک می‌شود به شرط این که x **به اندازه‌ی کافی** به a نزدیک شده باشد. در آنالیز نااستاندارد، وجود عناصر بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ، [۲] درک این مفهوم را راحت‌تر می‌کند.

فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته در نقطه‌ی صفر باشد به طوری که $f(۰) = ۰$. [۳] ساختار $\mathfrak{R}_۱ = (\mathbb{R}, +, ., ۰, ۱, <, f)$ را در زبان $\mathcal{L} \cup \{f\}$ در نظر بگیرید. دراین زبان یک نماد تابعی قرار داده‌ایم تا بتوانیم درباره‌ی تابعِ f صحبت کنیم. حال قرار دهید $T_۱ = Th(\mathfrak{R}_۱)$. فرض کنید $(\tilde{\mathfrak{R}}_۱, \tilde{f})$ یک مدل نااستاندارد برای $T_۱$ باشد که دارای عناصر بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ است. در این مدل، $\tilde{f}$ تابعی از $\tilde{R}_۱$ به $\tilde{R}_۱$ است که همه‌ی ویژگی‌های f در $\mathbb{R}$ را داراست.

لم ۲. تابع f در $\mathbb{R}$ در نقطه‌ی صفر پیوسته است اگر و تنها اگر تابع $\tilde{f} : \tilde{\mathfrak{R}}_۱ \to \tilde{\mathfrak{R}}_۱$ عناصر بی‌نهایت کوچک را به عناصر بی‌نهایت کوچک تصویر کند.

اثبات. فرض کنید f در صفر پیوسته باشد و $x \in \tilde{\mathbb{R}}_۱$ بی‌نهایت کوچک باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\tilde{f}(x)$ بی‌نهایت کوچک است. برای این منظور باید نشان دهیم که

$$\forall n \quad \tilde{f}(x) < \frac{۱}{n}$$

فرض کنید N یک عدد طبیعی دلخواه باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که $\tilde{f}(x) < \frac{۱}{N}$.

توجه کنید که در تابعِ f در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس

[۱] آبراهام رابینسون کتابی با عنوان «آنالیز نااستاندارد» دارد که خواندنی است.

[۲] infinitesimal, infinitely large

[۳] فرض صفر بودن را تنها برای راحت شدن بحثها کرده‌ایم.

$$\mathfrak{R}_1 \models \exists\delta \quad \forall x \quad |x| < \delta \to |f(x)| < \frac{1}{N}$$

از آنجا که $\mathbb{R}$ ارشمیدسی است، $M \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$(\bigstar) \quad \mathfrak{R} \models \forall x |x| < \frac{1}{M} \to |f(x)| < \frac{1}{N}$$

به بیان دیگر

$$\mathfrak{R}_1 \models \forall x \quad (M.|x| < 1 \to N.|f(x)| < 1)$$

ویژگی ($\bigstar$) یک ویژگی مرتبه اول است پس در تئوری T قرار دارد. پس باید توسط $\tilde{\mathfrak{R}}_1$ هم برآورده شود؛ پس

$$\tilde{\mathfrak{R}}_1 \models \forall x |x| < \frac{1}{M} \to |f(x)| < \frac{1}{N}$$

حال اگر $|x|$ بی‌نهایت کوچک باشد آن‌گاه به طور خاص $|x| < \frac{1}{M}$، پس $|f(x)| < \frac{1}{N}$؛ همانگونه که می‌خواستیم.

حال به اثبات قسمت عکس می‌پردازیم: فرض کنید که $\tilde{f}$ عناصر بی‌نهایت کوچک در $\tilde{\mathfrak{R}}_1$ را به عناصر بی‌نهایت کوچک ببرد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. اگر f پیوسته نباشد، آنگاه جمله‌ی زیر در اعداد حقیقی درست است:

$$\exists\epsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad \exists x \quad (|x| < \delta \wedge |f(x)| > \epsilon).$$

از آنجا که میدان اعداد حقیقی، ارشمیدسی است، حکم بالا برای یک عددِ $\epsilon > \frac{1}{n}$ درست است. پس جمله‌ی زیر در اعداد حقیقی درست است:

$$\forall\delta > 0 \quad \exists x \quad (|x| < \delta \wedge |f(x)| > \frac{1}{n}).$$

جمله‌ی بالا در موردِ $(\tilde{\mathfrak{R}}_1, \tilde{f})$ نیز درست است (زیرا این جمله در تئوری ما قرار دارد). اما این تناقض با فرضمان دارد: اگر δ را بی‌نهایت کوچک بگیریم، فرضمان این است که اگر $|x| < \delta$ آنگاه $|f(x)|$ از تمام $\frac{1}{n}$ ها کوچکتر است. $\square$

در مورد کاربردهای لم فشردگی در ریاضیات مثالهای شیرین فراوانی می‌توانم ذکر کنم، ولی ترجیح می‌دهم بحث منطق مرتبه‌ی اول را فعلا در همین جا خاتمه دهم و در باقی ترم به نظریه‌ی مجموعه‌ها بپردازم.

۲ نظریه‌ی مجموعه‌ها

استاد عزیزی [۴] می‌گفت که برای فهمیدن این که مجموعه چیست، حداقل ده سال ریاضیات در دوره‌ی تکمیلی لازم است. با چنین احتسابی، خودِ نگارنده نیز دقیق نمی‌داند که بالاخره این مجموعه چیست؛ با این حال به نظر نگارنده، با وجود نیم ترم تدریس منطق مرتبه‌ی اول، در هیچ درس دیگری به این اندازه شانس شناختن و شناساندن مجموعه وجود ندارد. در درس مبانی ریاضی درباره‌ی پیچیدگی مفهوم مجموعه سخن زیاد گفته‌ام، اما در این درس، به علت آشنائی مخاطب با منطق [۵] ، دستم بازتر است.

در دوره‌ی کارشناسی فرامی‌گیریم که تقریبا همه‌ی پدیده‌های ریاضی به نوعی مجموعه هستند. هر عدد طبیعی یک مجموعه است:

[۴] مارتین زیگلر
[۵] ان‌شاءالله!

$$\emptyset = ۰$$

$$\{\emptyset\} = \{۰\} = ۱$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{۰, ۱\} = ۲$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{۰, ۱, ۲\} = ۳$$

$$\vdots$$

مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بالا وجود دارد و به آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی گفته می‌شود. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه، یک مجموعه است؛ پس روابط مجموعه‌اند. اعداد صحیح از تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی زیر روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی حاصل می‌شوند: (پس مجموعه تشکیل می‌دهند)

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$$

$$(m, n) \sim (m', n') \Longleftrightarrow m + n' = n + m'$$

(به عنوان تمرین، ثابت کنید که رابطه‌ی فوق، هم‌ارزی است و کلاس‌های آن، اعداد صحیح هستند.) اعداد گویا از تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی زیر روی $\mathbb{Z}$ به دست می‌آیند، و بدین ترتیب آنها هم یک مجموعه تشکیل می‌دهند.

$$(m, n) \sim (m', n')$$

$$m.n' = n.m'$$

هر عدد حقیقی یک دنباله‌ی کُشی از اعداد گویاست. هر دنباله در اعداد گویا در واقع یک تابعِ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ است. اعداد طبیعی مجموعه‌اند و توابع نیز مجموعه‌اند پس اعداد حقیقی نیز مجموعه‌اند. با این تفاسیر، فهم بسیاری از پدیده‌های ریاضی، منوط به فهم مجموعه است.

تعریف کانتور از مجموعه به صورت زیر است:

> Unter eine Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente von M gennant werden) zu einem Ganzen.

تعریف ۳. مجموعه، تجمعی از عناصر معین و متمایز است از اشیائی در اطراف ما یا در تصور ما، که به آن اشیاء، اعضای مجموعه گفته می‌شود.

پیش از ادامه دادن بحث، بیت زیبای زیر از حافظ را به یاد آورید:

معشوق چون نقاب ز رُخ در نمی‌کشد
هر کس حکایتی به تصور چرا کنند!

در واقع هر تعریفی که از مجموعه‌ها ارائه دهیم، منجر به ایجاد تصوری از مجموعه در ذهن می‌شود. تنها راهی که با آن بتوان تصورها را به هم نزدیک کرد، اصل‌بندی مجموعه هاست. وقتی مجموعه‌ها را اصلبندی می‌کنیم، در واقع به هر کس اجازه‌ی داشتن تصور ذهنی خود از مجموعه را می‌دهیم، ولی آن تصورات را به نوعی قانونمند می‌کنیم که میانشان واگرائی و تناقضات رخ ندهد.

در ادامه، به بررسی نظریه‌ی مجموعه‌ها، در منطق مرتبه‌ی اول پرداخته‌ایم. در واقع می‌خواهیم یک **تئوری** یا یک **اصل‌بندی** برای مجموعه‌ها بنویسیم (و بدینسان یک تئوری یا اصلبندی برای ریاضیات خواهیم نوشت).

زبانی که برای نظریه‌ی مجموعه‌ها در نظر می‌گیریم، به صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = \{\in\}$$

در این زبان تنها یک نماد رابطه‌ای دو موضعی داریم که به آن نماد عضویت گفته می‌شود. نظریه‌ی مجموعه‌ها، آنگونه که کانتور وصفشان کرده است، تنها نیازمند دو اصل است:

اصل گسترش. گفتیم که مجموعه باید از عناصر مشخصی تشکیل شده باشد. یک سری عناصر مشخص، تنها **یک** مجموعه به دست می‌دهند. این گفته، موضوع اصل گسترش است: دو مجموعه که اعضای یکسان داشته باشند، در واقع یک مجموعه هستند. اصل گسترش را در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x, y \quad (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

از خانم زهرا شیروانیان بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.