۱ جلسه‌ی چهاردهم، اثبات‌پذیری و بیان قضیه‌ی تمامیت

یادآوری ۱. در جلسات قبل مفهوم درستی را تعریف کردیم. می‌نویسیم $\models \varphi$ (بخوانید φ همواره درست است) هرگاه φ در تمام $\mathcal{L}$ساختارها درست باشد؛ یعنی هرگاه

$$\forall \mathfrak{M} \quad \forall a_۱, \dots, a_n \in \mathfrak{M} \quad \mathfrak{M} \models \varphi(a_۱, \dots, a_n)$$

نیز درباره‌ی موارد زیر صحبت کردیم.

۱. تاتولوژی‌ها همواره درستند؛ برای مثال اگر

$$(p \vee \neg p)$$

یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها و ϕ یک فرمول مرتبه‌ی اول باشند، آنگاه فرمولِ

$$\varphi \vee \neg\varphi$$

همواره درست است.

۲. (لم سور وجودی)

$$\models (\varphi\frac{t}{x} \to \exists x \quad \varphi)$$

(در صورتی که x نسبت به t در φ آزاد باشد.)

۳. (لم معرفی سور وجودی) اگر $\models \varphi \to \psi$ و $x \notin FV(\psi)$ آنگاه $\models \exists x \quad \varphi \to \psi$.

$$\frac{\models \varphi \to \psi}{\models \exists x \quad \varphi \to \psi} x \notin F \vee (\psi)$$

۴. فرمولهای مربوط به رابطه‌ی تساوی

۵. قیاس استثنائی.

مثال ۲. نشان دهید که فرمول زیر همواره درست نیست.

$$\exists x A \wedge \exists x B \to \exists x \quad (A \wedge B)$$

اثبات. فرض کنید $\mathcal{L} = \{A, B\}$ و B, A دو محمول تک موضعی باشند. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختار به صورت زیر باشد.

$$\text{جهان } \mathfrak{M} = M = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

$$\text{تعبیر رابطه‌ی } A : A^{\mathfrak{M}} = \{۱, ۲\}$$

$$\text{تعبیر رابطه‌ی } B : B^{\mathfrak{M}} = \{۳, ۴\}$$

داریم: $\mathfrak{M} \models \exists x \quad A$ و $\mathfrak{M} \models \exists x \quad B$ ولی $\mathfrak{M} \not\models \exists x \quad (A \wedge B)$. □

توجه ۳. اگر $x \notin FV(B)$ آنگاه

$$\models \exists x \quad A \wedge \exists x \quad B \iff \exists x \quad (A \wedge B)$$

پس از تعریفِ $\models \varphi$ به تعریفِ $\vdash \varphi$ پرداختیم که آن را نیز در زیر یادآوری کرده‌ایم. دقت کنید که برای رخ دادنِ $\models \phi$ باید در تک‌تک Lساختار ها فرمولِ ϕ درست باشد.

تعریف ۴. می‌گوییم فرمول φ اثبات‌پذیر است و می‌نویسیم $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ هرگاه یکی از اتفاقات زیر رخ دهد:

۱. φ یکی از اصول تساوی باشد.

۲. φ یک تاتولوژی باشد.

۳. φ یک مصداق از لم سور وجودی باشد؛ به بیان دیگر φ به صورت زیر باشد:

$$\psi \frac{t}{x} \to \exists x \quad \psi$$ (t نسبت به x در ψ آزاد باشد.)

۴. φ با استفاده از قیاس استثنائی [1] از دو فرمولِ قبلاًثابت‌شده‌ی ψ و $\psi \to \varphi$: χ به دست آمده باشد. یعنی

$$\frac{\vdash \psi \quad \vdash (\psi \to \varphi)}{\vdash \varphi}$$

۵. φ با استفاده از لم معرفی سور وجودی از یک فرمول قبلاًثابت‌شده به دست آمده باشد؛ یعنی ϕ به صورت $\exists x \quad \psi \to \chi$ باشد و $\psi \to \chi$ قبلاً ثابت شده باشد و x در χ آزاد نباشد.

$$\frac{\vdash \psi \to \chi}{\vdash \exists x \quad \psi \to \chi} x \notin F \vee (\chi)$$

تعریف ۵ (بیان دقیق اثبات‌پذیری). می‌گوییم فرمول φ اثبات‌پذیر است هرگاه یک دنباله‌ی متناهیِ $\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_n$ از جملات وجود داشته باشد به طوری که $\psi_n = \varphi$ و ψ_iها مطابق قواعدِ ۱ تا ۵ ایجاد شده‌اند.

در واقع دنباله‌ی $\psi_1, \ldots, \psi_n$ یک اثبات برای فرمولِ ϕ نامیده می‌شود. دقت کنید که قواعد اثبات، متناهی هستند و طول یک اثبات نیز همواره متناهی است. وقتی یک اثبات برای یک فرمول می‌نویسیم، نیازی به توجه به معانی نداریم. در واقع اثبات یک فرایند کاملاً ماشینی است که با دانستن قواعد بالا پیش می‌رود.

توجه ۶. مجموعه‌ی اصول بالا را **دستگاه استنتاجی هیلبرت** می‌نامیم.

احتمالاً در تجربه‌ی ریاضیاتی خود به این برخورده‌اید که گاهی برای اثبات یک حکم، وارد جهانی می‌شویم که حکمْ درباره‌ی آن صادر شده است و درستی حکم آن را در آن جهان بررسی می‌کنیم. برای مثال، اگر به ما بگویند که اثبات کنید که در هر گروهی وارون هر عنصر یکتاست، ابتدا وارد یک گروه می‌شویم و در آن گروه به بررسی درستی این حکم می‌پردازیم. در این حالت،در واقع $\models \phi$ را ثابت کرده‌ایم. اما همین حکم را می‌توان بدون در نظر گرفتن هیچ گروه خاصی و تنها با استفاده از اصول نظریه‌ی گروهها ثابت کرد. در این صورت بدون این که وارد گروه خاصی بشویم تعدادی متناهی نتیجه‌گیری ما را به حکم می‌رساند. در

[1] MP(Modus ponens)

اینجا از $\vdash$ استفاده کرده‌ایم. یکی از مهمترین ویژگی‌های منطق مرتبه‌ی اول آن است که در آن «درستی» و «اثبات‌پذیری» با هم معادلند. اثبات این گفته، هدف درس جلسات آینده‌ی ما خواهد بود. به بیان دیگر در جلسات آینده ثابت خواهیم کرد که

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi$$

عبارت بالا قضیه‌ی درستی و تمامیت گودل [۲] نام دارد.

دقت کنید اثبات چپ به راست عبارت بالا آسان است؛ زیرا اصولی که از آنها در اثبات استفاده می‌کنیم همه «همواره درست» هستند و در هر مرحله‌ای فرمولی همواره درست ایجاد می‌کنند.

اما مشکلْ اثباتِ راست به چپ است، که **قضیه‌ی تمامیت** نام دارد. برای این کار باید نشان بدهیم که اگر جمله‌ای درست باشد، قطعاً برای آن اثباتی وجود دارد.

در واقع می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $\models \varphi$ آنگاه $\vdash \varphi$. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که اگر $\nvdash \varphi$ آنگاه $\not\models \varphi$. از آنجا که قرار است حکم بالا را برای تمام فرمولها ثابت کنیم، کافی است به جای عبارت بالا ثابت می‌کنیم که $\nvdash \neg\varphi$ آنگاه $\not\models \neg\varphi$. به بیان دیگر باید ثابت کنیم که اگر $\nvdash \neg\varphi$ آنگاه یک $\mathcal{L}$ساختار $\mathfrak{M}$ موجود است به طوری که $\mathfrak{M} \models \varphi$.

خلاصه ۷ (خلاصه‌ی بحث)**.** برای اثبات قضیه‌ی تمامیت کافی است نشان دهیم که اگر $\nvdash \neg\varphi$ آنگاه φ مدل دارد؛یعنی φ حداقل در یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ درست است؛ به بیان دیگر:

$$\nvdash \neg\varphi \Rightarrow \exists\mathfrak{M} \quad \mathfrak{M} \models \varphi$$

تعریف ۸. می‌گوییم فرمولِ φ سازگار است (یا متناقض نیست) هرگاه **نقیضِ** آن اثبات نشود؛ به بیان دیگر هرگاه

$$\nvdash \neg\varphi.$$

برای اثبات قضیه‌ی تمامیت کافی است عبارت زیر اثبات شود:
هر فرمول سازگار دارای مدل است. به بیان دیگر:

$$\exists\mathfrak{M} \quad \mathfrak{M} \models \varphi \quad \Leftarrow \quad \nvdash \neg\varphi$$

توجه ۹. کافی است قضیه‌ی تمامیت برای جمله‌ها ثابت شود.

نیز قرار است به جای این که ثابت کنیم هر جمله‌ی سازگار دارای مدل است، حکمی کلی‌تر ثابت می‌کنیم. برای آن حکم نیاز به تعریف زیر داریم:

تعریف ۱۰. فرض کنید $\sum$ مجموعه‌ای (متناهی یا نامتناهی) از جملات در یک زبان مرتبه‌ی اولِ $\mathcal{L}$ باشد. می‌گوییم $\sum$ متناهیاً سازگار است هرگاه برای هر تعداد متناهی جمله‌ی $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \sum$ داشته باشیم

$$\nvdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$$

(به بیان دیگر هیچ تعداد متناهی از جملات موجود در $\sum$ با هم تناقض ندهند.)

در ادامه‌ی درس حالت کلی‌تر قضیه‌ی تمامیت را به صورت زیر اثبات خواهیم کرد:

[۲] Gödel

قضیه ۱۱. اگر $\sum$ یک مجموعه‌ی متناهیاً سازگار از جملات در یک زبان مرتبه‌ی اولِ $\mathcal{L}$ باشد آنگاه $\sum$ دارای مدل است (یعنی $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ چنان موجود است که برای هر $\varphi \in \sum$ داریم $\mathfrak{M} \models \varphi$.)

برای اثبات تمامیت کافی است $\sum = \{\varphi\}$ را در نظر بگیریم.

تمرین ۱. فرض کنید که φ یک $\mathcal{L}$جمله باشد.

آ) نشان دهید که در هر $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ داریم اگر $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ آنگاه $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$.

ب) نشان دهید که از $\not\models \varphi$ نتیجه نمی‌شود که $\models \neg\varphi$. (بنابراین اگر قضیه‌ی درستی تمامیت ثابت شود، آنگاه از $\not\vdash \varphi$ نتیجه **نمی‌شود** که $\vdash \neg\varphi$؛ یعنی اگر φ اثبات‌پذیر نباشد، دلیلی وجود ندارد برای این که $\neg\varphi$ اثبات‌پذیر باشد).