مبانی منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها

محسن خانی

دانشگاه صنعتی اصفهان

نیمسال اول ۹۸-۹۷

معشوق چون نقاب ز رخ در نمی‌کشد
هر کس حکایتی به تصور چرا کنند
حافظ

پیشگفتار

در من‌یزید پرفروش مقاله‌بازی، و جوشش عمومی دانشگاهها برای پیشرفت، و در راه آن، سنجش اساتید بر اساس کمیت مقالاتشان، وقت گذاشتن برای تدریس خوب و تایپ کردن جزوه‌ی درسی و حرص و جوش خوردن برای دانشجویان کارشناسی، چیزی جز خودکشی علمی به نظر نمی‌رسد. شاید هر آدم عاقلی وقتی را که در این کار صرف می‌شود، صرف تولید مقاله کند، یا دستکم همه چیز را هر چه زودتر تبدیل به یک کتاب کند تا مگر «امتیازی» از آن به در آید. از دیگر سو، تدریس درس سنگین و پیچیده‌ای چون منطق ریاضی، به مخاطبی که نه ریاضی محض خوانده است و نه ریاضی کاربردی و نه فرق بین ایندو را می‌داند، نه جبری به درستی خوانده است نه آنالیز، و با هر درسی در حد یک سلام و علیک آشنائی گرفته است، و گاهی حتی ریاضی رشته‌ی باب میلش نبوده است، و نیز آموخته است که هر چیزی باید در «صنعت» به درد بخورد، جز بر ملال و خستگی دوچندان مدرس نمی‌افزاید.

در این شرایط تدریس مرا بیش از هر چیز دیگر، به یاد حکایت «جامع بعلبک» سعدی می‌اندازد:

فهم سخن گر نکند مستمع
قوت طبع از متکلم مجوی
فُسحَتِ میدان ارادت بیار
تا بزند مرد سخنگوی گوی

من با شور و شوق از قضیه‌ی ناتمامیت می‌گویم و تنها پرسش دانشجو این است که «از اینها چند نمره در امتحان خواهد آمد».

ولی چند چیز مرا در کار خود مصمم نگه می‌دارد. اول، اعتماد به سیستم دانشگاه صنعتی اصفهان که تأکید آن بر تدریسِ با کیفیت در دوره‌ی کارشناسی است. دوم وجود انگشت‌شمار دانشجویان هشیار و علاقه‌مند که در نگاهشان بصیرت موج می‌زند. سوم این که دریافته‌ام که جزواتم که روی اینترنت قرار می‌گیرد مورد توجه علاقه‌مندانی خارج از دانشگاه خودمان قرار گرفته است و گاهی به عنوان منبع درسی انتخاب شده است؛ باز به قول سعدی خوشحالم از دیدن این که «دوران باخبر در حضورند».

از درددلها که بگذریم، جزوه‌ی پیش‌رو حاصل یک ترم تدریس منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها در دانشگاه صنعتی اصفهان است. در این جزوه کوشیده‌ام تا با زدودن هر چه که در مسیر اصلی نیست، به بیان و اثبات دو قضیه‌ی مهم تمامیت و ناتمامیت برسم. پرداختن به هر یک از ایندو نیازمند یک ترم تدریس جداگانه است. هر چند همواره دوست دارم جزوه، حاصل فکر خودم باشد، ولی خواسته یا ناخواسته، این جزوه بسیار تحت تأثیر کتاب «منطق ریاضی» نوشته‌ی «مارتین زیگلر» است. هر آن ریزبینی و دقتی که منِ تازه‌کار بخواهم داشته باشم، مارتین به مراتب بالاتر داشته است و امید من این است که در ترم‌های آینده به جزوه‌ام بخشهای دیگری بیفزایم تا مگر آن تفاوتهای طرز نگاه من با او کمی روشنتر شود. نقطه‌ی قوت این جزوه، از نظر من، تدریس نظریه‌ی مجموعه‌ها بلافاصله در ادامه‌ی منطق است. سعی کرده‌ام بسیاری از ابهاماتی را که در اکثر کتابهای نظریه‌ی مجموعه‌ها وجود دارد، به لطف بهره‌مندی از ابزار منطق ریاضی برطرف کنم و می‌توانم بگویم که جزوه‌ی حاصل از دقت قابل قبولی در بیان نظریه‌ی مجموعه‌ها برخوردار است. لکن بی‌شک در جزوه اشتباهات زیادی هست که باید به مرور و با تدریسهای متوالی برطرف شوند. عجله برای بموقع آماده کردن جزوه، سطح ادبیات به کار رفته در آن را نیز تحت تأثیر قرار داده است که این اشکال نیز در طول ترمهای آینده برطرف خواهد شد.

بر خود لازم می‌دانم تا از امیرنیک‌آبادی، زهرا شیروانیان، علیرضا صالح‌آبادی، گلنوش خرسندی و همسرم درسا پیری، بابت تایپ اولیه‌ی بسیاری از جلسات سپاسگزاری کنم.

فهرست مطالب

[۱] propositional logic

۱.۰ جلسه‌ی اول، معرفی منطق ریاضی

در این جلسه قرار است منطق ریاضی را هم به عنوان یکی از گرایشهای رشته‌ی ریاضی، و هم به عنوان یک درس سه واحدی معرفی کنم. منطق ریاضی، یا **مبانی ریاضیات** گرایشی از ریاضیات محض است که خود دارای چهار زیرگرایش اصلی است: نظریه‌ی مدل، نظریه‌ی اثبات، نظریه‌ی بازگشت و نظریه‌ی مجموعه‌ها. در درس منطق ریاضی به هر یک از این گرایشها به فراخورِ وقت پرداخته خواهد شد. گرایشِ تخصصی مدرس، نظریه‌ی مدل است و از این رو، بعید نیست که تکیه‌ی او بر جنبه‌های نظریه‌ی مدلی درس بر بقیه‌ی جنبه‌ها بچربد.

علم منطق همواره به عنوان ابزارِ کار، در کنار علم ریاضی وجود داشته است و جائی از ریاضی خالی از منطق نبوده است، لیکن وقوع رویدادهائی در قرن نوزدهم باعث اهمیت یافتن بیشتر منطق و تبدیل شدن آن به یک گرایش مستقل در ریاضیات شد. در زیر، با ذکر مقدماتی، به برخی از این رویدادها خواهیم پرداخت.

همان طور که می‌دانید برای اثبات یک قضیه در ریاضیات به دو عامل نیازمندیم نخست، قضایائی که قبلاً ثابت شده‌اند (که به عنوان پیش‌فرض از آنها استفاده می‌کنیم) و دوم، آشنائی با روش استدلال کردن (این را نیز می‌دانیم که باید روشهای استدلال کردن بین همه‌ی ریاضی‌دانان پذیرفته‌شده و به صورت یکسان باشند). اما خودِ آن قضایای قبلاً اثبات‌شده از قضایای دیگری، باز هم توسط استدلالهای منطقی نتیجه شده‌اند و آنها نیز به همین ترتیب. پس این سوال پیش می‌آید که **آیا مجموعه‌ای از اصول اولیه وجود دارد که هر قضیه‌ای در ریاضی در نهایت به یکی از آنها برسد، و هر چه که نادرست باشد، نادرستی آن از این اصول نتیجه شود؟** به بیان دیگر، **آیا مجموعه‌ای کامل** [۲] **از اصول برای ریاضیات وجود دارد؟**

طبیعی است که سوال بالا، همواره برای ریاضیدانان مطرح بوده باشد. بخشهایی از ریاضیات از گذشته دارای اصلبندی بوده‌اند: برای مثال، هندسه‌ی اقلیدسی دارای چند اصل ساده است که همه‌ی قضایا (در هندسه‌ی اقلیدسی) از آنها نتیجه می‌شوند، و هر چیزی که اشتباه باشد، با استفاده از اصول اقلیدس می‌توان اشتباه بودن آن را ثابت کرد. هیلبرت، ریاضیدان آلمانی که در اکثر گرایشهای ریاضی تبحر داشت، معتقد بود که برای ریاضیات به عنوان یک علم نیز مجموعه‌ای از اصول اولیه وجود دارد.

در قرن ۱۹ میلادی، هیلبرت **۲۳** مسئله‌ی باز در علم ریاضی را در یک سخنرانی معروف مطرح کرد.

[۲] عبارت «کامل» یک عبارت تخصصی است که در این درس معنی خواهد شد.

پروژه ۱. به عنوان یک پروژه‌ی تحقیقاتی، به دانشجو پیشنهاد می‌کنم که ۲۳ سوال مطرح شده توسط هیلبرت، درگرایشهای مختلف ریاضی را جمع‌آوری کند.

پروژه ۲. اصول اقلیدس چه بودند؟ (در واقع برخی قضایائی که اقلیدس ثابت کرده بود، از اصول وضع شده توسط او نتیجه نمی‌شد و هیلبرت اصول هندسه را **کامل** کرد.)

از میان این مسائل، یکی مورد علاقه‌ی این درس است؛ مسئله‌ی دهم: آیا یک روش الگوریتمیک وجود دارد که تعیین کند که آیا یک چند جمله‌ایِ چندمتغیره با ضرایب در اعداد صحیح، دارای ریشه‌ای در اعداد صحیح است یا خیر؟ سوال بالا منجر به مطرح شدن «مسئله‌ی تصمیم‌گیری»، به آلمانی، $Entscheidungsproblem$ [۳] شد، که مربوط به بحث ماست. صورت این مسئله این است: آیا می‌توان مجموعه (ی‌کوچک‌ومناسبی) از اصول برای ریاضیات (به طور خاص برای اعداد طبیعی) نوشت به طوری که هر چه که در ریاضیات درست است، درستی آن از این اصول نتیجه شود و هر چه که نادرست باشد نادرستی آن از این اصول نتیجه شود؟

ظاهراً در همان گردهمائی، احتمالاً در روز دیگری، گودل قضیه‌ی ناتمامیت خودش را عرضه کرده است، که امکان چنین اصل‌بندی را برای ریاضیات نفی می‌کند. **بنا به این قضیه، (قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل) هر اصل‌بندی (مناسب از نظر منطقی) که برای اعداد طبیعی در نظر بگیریم، ناکامل است؛ یعنی قضیه‌ی درستی درباره‌ی اعداد طبیعی پیدا می‌شود که توسط آنها قابل اثبات نیست.** [۴]

قضیه‌ی ناتمامیت گودل، که در این درس بدان خواهیم پرداخت، یکی از ارکان مهم در شروع گرایش منطق ریاضی بوده است. گفتیم که بنا به این قضیه، اصلبندیِ کامل (یعنی اصلبندی‌ای که درست و غلط بودن همه چیز از آن معلوم شود) برای ریاضیات وجود ندارد؛ با این حال چیزهائی که تا اکنون در ریاضیات ثابت شده‌اند، دارای اصولی اولیه‌اند. مشکل اینجاست که نمی‌دانیم که آیا این اصول به تناقضی منجر می‌شوند یا نه. در زیر پس از مقدمه‌ای کوتاه در این باره بیشتر توضیح داده‌ام.

همزمان با پیشرفت سایر گرایشهای ریاضی، به ویژه آنالیز ریاضی، معلوم شد که مفهوم «مجموعه» نقشی اساسی در ریاضیات بازی می‌کند. اعداد طبیعی مجموعه‌اند (به جزوه‌ی مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید) روابط و توابع مجموعه‌اند، اعداد صحیح با نوعی رابطه‌ی هم‌ارزی ازاعداد طبیعی حاصل می‌شوند، اعداد گویا با یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی اعداد صحیح به دست می‌آیند و اعداد حقیقی، دنباله‌هائی شمارا از اعداد گویا هستند. بنابراین همه‌ی پدیده‌های ریاضی مجموعه‌اند و برای اصلبندی ریاضیات، اصلبندی نظریه‌ی مجموعه‌ها بسیار مهم است.

در نخستین تعریف شهودی مجموعه‌ها، مجموعه عبارت است از گردایه‌ای از اشیاء که دارای ویژگی مشترکی هستند. اگر این ویژگی مشترک را p بنامیم، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{x|p(x)\}.$$

در همان قرن ۱۹ مطرح شدن یک تناقض توسط راسل، ابهام بزرگی در ریاضیات ایجاد کرد: فرض کنید $p(x)$ عبارتِ $x \notin x$ باشد. پس عبارت زیر یک مجموعه است:

$$A = \{x|x \notin x\}$$

[۳] بخوانید: اِنْتْشایْدونگز پغُبلم

[۴] پیشنهاد می‌کنم مقاله‌ی «تجاهل بورباکی» را مطالعه بفرمائید. این قضیه، قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل نام دارد. فعلاً نمی‌توانم صورت دقیقتری از آن را بیان کنم.

از آنجا که A مجموعه نیست، از دو حال خارج نیست؛ یا $A \in A$ یا $A \notin A$.

تمرین ۳. نشان دهید که اگر $A \in A$ آنگاه $A \notin A$ و اگر $A \notin A$ آنگاه $A \in A$.

همان طور که در تمرین بالا مشاهده می‌کنید، اگر نظریه‌ی مجموعه‌ها همین باشد که کانتور می‌گوید، پس ریاضیات علمی تناقض آمیز است. این خودْ یکی از نگرانی‌های منطق است: آیا ممکن است ریاضیات ما، که ساخت آن از اصول خاصی پیروی می‌کند، تناقض‌آمیز باشد؟ (سوال تناقض آمیز بودن ریاضیات، با سوال وجود یک اصلبندی کامل برای آن، یا همان قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل، در ارتباط است؛ این ارتباط را در این درس خواهید دید.)

در این درس قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل را ثابت خواهیم کرد و خواهیم دید که روش اثبات، استفاده از یک سوال خودْمرجع، مشابه تناقض راسل است. در واقع اگر مجموعه‌ای از اصول برای ریاضیات بنویسیم و این اصول «از خود بپرسند» که آیا ما با هم سازگاریم (یعنی تناقض نداریم)، این سوال توسط آن اصول قابل پاسخ دادن نیست.

در بحثهای بالا از کلمه‌ی الگوریتم نیز استفاده شد. در واقع، مبانی علم منطق به مبانی علوم رایانه‌ی نظری نیز پیوند می‌خورد. **قضیه‌ی ناتمامیت اول** گودل، که آن را نیز در این درس ثابت خواهیم کرد، می‌گوید که «الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند که آیا یک جمله‌ی داده شده در اعداد طبیعی درست است یا خیر». مسئله‌ی توقف [۵]، در نظریه‌ی محاسبه‌پذیری، می‌گوید که الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند که کدام الگوریتم رایانه‌ای می‌ایستد و کدام تا ابد ادامه می‌یابد. در درس منطق به ارتباط این دو با هم خواهیم پرداخت و خواهیم دید که این دو سوال با هم معادلند.

گودل قضیه‌ی مهم دیگری به نام «قضیه‌ی تمامیت» دارد. بنا به این قضیه، هر چه که در «منطق مرتبه‌ی اول» درست باشد، قابل اثبات است [۶]. قضایای گودل (به خصوص قضیه‌ی تمامیت) منجر به ایجاد گرایشی در ریاضیات به نام نظریه‌ی مدل شد. در این گرایش ابزارهای منطقی برای مطالعه‌ی جبر و آنالیز و هندسه و سایر گرایشهای دیگر ریاضی استفاده می‌شوند. در بخشی از این درس به نظریه‌ی مدل نیز خواهیم پرداخت. نحوه‌ی چینش درس بدین صورت خواهد بود: نخست به منطق گزاره‌ها، و سپس به منطق مرتبه ی اول خواهیم پرداخت. قضیه‌ی تمامیت گودل را ثابت خواهیم کرد، سپس وارد نظریه‌ی مجموعه‌ها خواهیم شد و قضیه‌ی ناتمامیت اول و دوم را ثابت خواهیم کرد. سپس وارد نظریه‌ی بازگشت و مبانی علوم کامپیوتری درس خواهیم شد و به قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل در حساب خواهیم پرداخت.

درس منطق در سه قضیه‌ی زیر خلاصه می‌شود:

۱. قضیه ناتمامیت دوم گودل: برای هر مجموعه‌ای از اصول مرتبه‌ی اول که برای اعداد طبیعی در نظر بگیریم، حقایق درستی درباره‌ی اعداد طبیعی وجود دارند که از آنها نتیجه نمی‌شوند.

۲. قضیه‌ی ناتمامیت اول گودل: اگر مجموعه‌ی همه‌ی گزاره‌هایی که در اعداد طبیعی درست هستند را در نظر بگیریم، الگوریتمی وجود ندارد که مشخص کند که برای یک گزاره‌ی داده شده، آیا خودِاین گزاره در این مجموعه است یا نقیض آن.

۳. قضیه‌ی تمامیت گودل: آنچه در منطق مرتبه‌ی اول درست است، در این منطق قابل اثبات است و آنچه اثبات شود، درست است.

---

[۵] Halting problem

[۶] ممکن است مقایسه‌ی این قضیه با قضیه‌ی ناتمامیت کمی شما را گیج کند. برای دیدن بیان دقیق آن کافی است چند جلسه صبر کنید.

۲.۰ جلسه‌ی دوم، جبرهای بولی و شروع منطق گزاره‌ها

پیش از شروع درس، دوباره‌ی مهمترین صحبتهای جلسه‌ی اول را مرور می‌کنم.

۱. قضیه‌ی تمامیت گودل [۷]:

در منطق مرتبه‌ی اول هر آنچه که درست باشد [۸] قابل اثبات است.

۲. قضیه‌ی ناتمامیت اول گودل: الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند که آیا یک جمله‌ی داده شده در مورد اعداد طبیعی درست است یا غلط (مرتبط با مسئله‌ی توقف [۹])

۳. قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل [۱۰] : هر اصل‌بندی‌ای (کوچکی) که برای اعداد طبیعی در نظر بگیریم ناکامل است؛ یعنی جمله‌ای درست درباره‌ی اعداد طبیعی پیدا می‌شود که از این اصل‌بندی نتیجه نشود.

درس منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها را با سؤال زیر می‌آغازم.

تمرین ۴. آیا جمله‌ی زیر در زبان فارسی درست است؟

«کوچکترین عدد طبیعی‌ای که نتوان آن را با کمتر از ۵۰ کلمه در فرهنگ لغت دهخدا توصیف کرد وجود دارد.»

دقت کنید که در صورتی که جمله‌ی بالا درست باشد، غلط است. زیرا عبارتِ بالا خودْ یک وصف است برای کوچکترین عددی که نتوان آن را وصف کرد! بررسی کنید که جمله‌ی بالا در صورت غلط بودن، درست است!

هدف از تمرین بالا (که البته ایده‌ای برای اثبات قضیه‌ی ناتمامیت نیز هست) نشان دادن این است که خطرِ در معرض تناقض قرار گرفتن، هر منطقی را تهدید می‌کند!

تعریف ۵ (جبر بولی [۱۱]). مجموعه‌ی B را به همراه عملگرهای

$$\sqcap : B \times B \to B$$

$$\sqcup : B \times B \to B$$

$$-^c : B \to B$$

و دو عنصرِ مشخصِ $۰, ۱ \in B$ یک **جبر بولی** می‌نامیم، و می‌گوییم $(B, \sqcap, \sqcup, ^c, ۰, ۱)$ یک جبر بولی است، هرگاه ویژگی‌های زیر برآورده شوند:

۱. $a \sqcap ۰ = ۰$

۲. $a \sqcup ۰ = a$

[۷] Gödel

[۸] عبارتهای «درست بودن» و «قابل اثبات بودن» نیاز به تعریف دارند.

[۹] Halting Problem

[۱۰] second incompleteness theorem

[۱۱] Boolean Algebra

۳. $a \sqcap 1 = a$

۴. $a \sqcup 1 = 1$

۵. $a \sqcap a = a$

۶. $a \sqcup a = a$

۷. $a \sqcap b = b \sqcap a$

۸. $a \sqcup b = b \sqcup a$

۹. $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$

۱۰. $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$

۱۱. $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$

۱۲. $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$

۱۳. $a \sqcap a^c = 0$

۱۴. $a \sqcup a^c = 1$

۱۵. $a \sqcap (a \sqcup b) = a$

۱۶. $a \sqcup (a \sqcap b) = a$.

مثال ۶. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، آنگاه $\big(P(X), \cap, \cup, ^c, 0, X\big)$ یک جبر بولی است. در این جا منظور از $\cap$ و $\cup$ به ترتیب اشتراک و اجتماع مجموعه‌ها و منظور از ^{c} عملگر متمم‌گیری است. نیز منظور از $P(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی X است.

مثال ۷. روی مجموعه‌ی $\{0, 1\}$ اعمال زیر را در نظر بگیرید:

$$a \sqcap b = \min\{a, b\}$$

$$a \sqcup b = \max\{a, b\}$$

$$0^c = 1$$

$$1^c = 0$$

جبر بولیِ این مثال، کوچکترین جبر بولیِ ممکن است.

تمرین ۸. فرض کنید X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد. قرار دهید

$$B = \{Y \subseteq X | \text{متناهی است } Y^c \text{ متناهی است یا } Y\}$$

نشان دهید که $(B, \cap, \cup, ^c, \cdot, X)$ یک جبر بولی است.

توجه ۹. هر جبر بولی با یک جبر بولی مجموعه‌ای (یعنی یک جبر بولی مانند مثال ۶ ایزومرف است.) در صورت علاقه به دیدن اثبات این قضیه و کسب اطلاعات بیشتر درباره‌ی جبرهای بولی، کتاب Handbook of Boolean Algebra را به شما پیشنهاد می‌کنم.

تمرین ۱۰. نشان دهید که در تعریف جبر بولی می‌توان قسمت $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$ را حذف کرد؛ یعنی نشان دهید که این قسمت از تعریف، از قسمتهای دیگر نتیجه می‌شود.

تمرین ۱۱. نشان دهید که در یک جبر بولی وارون هر عنصر یکتاست، یعنی اگر $a \sqcap b = ۰$ و $a \sqcup b = ۱$ آنگاه $b = a^c$.

تمرین ۱۲. نشان دهید که در یک جبر بولی قوانین دِمُرگان برقرارند.

$$(a \sqcap b)^c = a^c \sqcup b^c$$

$$(a \sqcup b)^c = a^c \sqcap b^c$$

$$(a^c)^c = a$$

یک مثال مهم از جبرهای بولی، جبر لیندن‌باوْم‌ـ تارسکی [۱۲] است که در ادامه‌ی درس بدان خواهیم پرداخت. [۱۳]

۱.۲.۰ منطق گزاره‌ها [۱۴]

برای معرفی هر منطقی، معرفی دو جزو ضروری است:

۱. صرف آن منطق [۱۵] (نمادها یا سینتکس)

۲. نحو آن منطق [۱۶] (معانی)

یعنی نخست باید «دستور یک زبان» و نحوه‌ی کلمه‌سازی و جمله‌سازی در آن زبان بیان شود، و سپس باید درباره‌ی «معنای جملات» صحبت شود. همچنین ضروری است که رابطه‌ای میان دنیای علائم و دنیای معانی برقرار شود. به بیان دیگر باید «صورت و معنی» منطق مورد نظر مشخص شود.

[۱۲] Lindenbaum-Tarski

[۱۳] کسانی که توپولوژی خوانده‌اند: نشان دهید مجموعه‌ی مجموعه‌های بازبسته در یک فضای توپولوژیک، با همان اعمال اجتماع و اشتراک و متمم‌گیری، یک جبر بولی تشکیل می‌دهد.

[۱۴] propositional logic

[۱۵] syntax

[۱۶] semantic

۲.۲.۰ خروج از بحث، بحث صورت و معنی

در اشعار فارسی بارها عبارتهای «صورت و معنی» آمده است. برای نمونه در گلستان سعدی چنین آمده است:

> یکی را از مشایخ شام پرسیدند از حقیقت تصوف؛گفت پیش از این طایفه‌ای در جهان بودند به صورت پریشان و به معنی جمع؛ اکنون جماعتی هستند به صورت جمع و به معنا پریشان!

نیز در غزلی از سعدی آمده است که:

دل عارفان ربودند و قرار پارسایان

همه شاهدان به صورت، تو به صورت و معانی

ادامه‌ی درس:

زبان منطق گزاره‌ها از اجزای زیر تشکیل شده است:

۱. یک مجموعه‌ی $M = \{p_۰, p_۱, \ldots\}$ از متغیرها (یا گزاره‌های اتمی)

۲. علائم منطقیِ $\neg, \wedge$ (نقیض و عطف)

مجموعه‌ی M از گزاره‌های اتمی را معمولاً شمارا در نظر می‌گیریم؛ اما ناشمارا در نظر گرفتن آن خللی به بحث وارد نمی‌کند.

تعریف ۱۳ (نادقیق)**.** یک فرمول (جمله) در منطق گزاره‌ها از اِعمالِ علائم $\neg, \wedge$ به گزاره‌های اتمیِ $p_۰, p_۱, \ldots$ بدست می‌آید.

تعریف بالا کاملاً دقیق برای ما مشخص نمی‌کند که چه چیزهای فرمول به حساب می‌آیند و چه چیزهایی فرمول نیستند. عموماً در این درس، از تعاریف استقرائی (مانند تعریف زیر) برای فرمولها استفاده می‌کنیم. **برای ادامه‌ی درس یک مجموعه از گزاره‌های اتمی را ثابت در نظر گرفته‌ایم.**

تعریف ۱۴ (مجموعه‌ی گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها)**.** مجموعه‌ی فرمولها (گزاره‌ها) در منطق گزاره‌ها، کوچکترین مجموعه‌ی PR است که در سه شرط زیر صدق کند.

۱. برای هر گزاره‌ی اتمی $p \in M$ داشته باشیم

$$p \in PR$$

۲. اگر $\phi \in PR$ آنگاه $(\neg\phi) \in PR$

۳. اگر $\phi, \psi \in PR$ آنگاه $(\phi \wedge \psi) \in PR$

مثال ۱۵. عبارت $\big(p_۱ \wedge ((\neg p_۲) \wedge p_۳)\big)$ یک فرمول در منطق گزاره‌ها است (چرا؟)

مثال ۱۶. نشان دهید که $\phi = p \wedge \neg$ یک فرمول در منطق گزاره‌ها نیست.

اثبات. ادعا می‌کنیم که $PR - \{\phi\} = PR$ (در این صورت معلوم می‌شود که $\phi \notin PR$.) نخست دقت کنید که برای هر گزاره‌ی اتمیِ $p \in M$ داریم $p \in PR - \{\phi\}$. همچنین دقت کنید که اگر $\psi \in PR - \{\phi\}$ آنگاه $(\neg\psi) \in PR - \{\phi\}$ و اگر $\psi_۱, \psi_۲ \in PR - \{\phi\}$ آنگاه $(\psi_۱ \wedge \psi_۲) \in PR - \{\phi\}$. پس مجموعه‌ی $PR - \{\phi\}$ همه‌ی ویژگی‌هایی که در تعریفِ ۱۴ بدانها اشاره شده است داراست. از طرفی در همان تعریف گفته‌ایم که PR کوچکترین مجموعه‌ی دارای این ویژگی‌هاست پس $PR \subseteq PR - \{\phi\}$ یعنی $\phi \notin PR$. □

توجه ۱۷. در منطق گزاره‌ها از نمادهای کمکیِ $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

۱. $p \rightarrow q := (\neg p) \vee q$

۲. $p \vee q := \neg((\neg p) \wedge (\neg q))$

۳. $p \leftrightarrow q := (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

۰.۲.۳ معناشناسی منطق گزاره‌ها

در بخش قبل درباره‌ی نحوه‌ی جمله‌سازی در منطق گزاره‌ها سخن گفتیم. در این بخش، به «معناشناسی» منطق گزاره‌ها می‌پردازیم.

معناشناسی منطق گزاره‌ها با استفاده از **توابع ارزیابی** [۱۷] صورت می‌پذیرد. هر تابع ارزیابی، ارزشی از میان صفر و یک به جملات اتمی می‌بخشد.

تعریف ۱۸ (تابع ارزیابی). به هر تابعِ $\mu : M \rightarrow \{۰, ۱\}$ یک تابع ارزیابی می‌گوییم.

توجه ۱۹. هر تابع ارزیابی $\mu : M \rightarrow \{۰, ۱\}$ را می‌توان به یک تابعِ ارزیابی $\mu : PR(M) \rightarrow \{۰, ۱\}$ به طریق زیر گسترش داد.

$$\mu(\phi \wedge \psi) = \mu(\phi) \wedge \mu(\psi)$$

$$\mu(\neg\phi) = \neg\mu(\phi)$$

که در آن

$\wedge$	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

$\neg$	۰	۱
	۱	۰

دقت کنید که مقادیرِ μ در جبر بولیِ $\{۰, ۱\}$ هستند و بنابراین $\mu(\phi) \wedge \mu(\psi)$ و $\neg\mu(\phi)$ مطابق مثالِ ۷ محاسبه می‌شوند.

تمرین ۲۰. جدول ارزش هر کدام از گزاره‌های زیر را بکشید:

۱. $p \vee q$

۲. $p \wedge q$،

۳. $(\neg p)$

۴. $p \leftrightarrow q$

۵. $p \rightarrow q$

۶. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

[۱۷] evaluation map

۷. $(p \to q) \wedge (\neg p \to q) \to q$

۸. $(p \vee q \to r) \to (p \to r \wedge q \to r)$

سوال ۲۱. فرض کنید یک جدول ارزش دلخواه شامل گزاره‌های $p_۱, \ldots, p_n$ داشته باشیم. آیا می‌توانید یک گزاره بر حسب $p_۱, \ldots, p_n$ مثال بزنید که دقیقاً همان جدول ارزش را داشته باشد؟ برای مثال گزاره‌ی $f(p, q)$ را در زیر حدس بزنید.

p	q	$f(p,q)$
۱	۱	۱
۰	۰	۰
۰	۱	۰
۱	۰	۱

خودتان یک جدول ارزش برای یک گزاره‌ی شامل متغیرهای p, q, r بکشید و گزاره‌ای که آن جدول ارزش را دارد، حدس بزنید.

۳.۰ جلسه‌ی سوم

همان طور که در جلسات قبل گفتیم هر گزاره‌ای را در منطق گزاره‌ها می‌توان به صورت $f(p_۱, ..., p_n)$ تصور کرد که در آن $p_۱, ..., p_n$ گزاره‌های اتمی هستند. برای مثال $f(p_۱, \ldots, p_n) = p_۱ \wedge \ldots \wedge p_n$ یگ گزاره در منطق گزاره‌هاست. همچنین گفتیم که برای هر گزاره‌ای درمنطق گزاره‌ها یک جدول ارزش در نظر می‌گیریم که ارزش آن گزاره را بر حسب ارزش اجزای آن مشخص می‌کند.

مثال ۲۲. جدول ارزش گزاره‌ی $p_۱ \wedge \neg p_۲$ به صورت زیر است.

$p_۱$	$p_۲$	$\neg p_۲$	$\neg p_۲ \wedge p_۱$
۰	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰
۱	۰	۱	۱

یک سوال طبیعی این است که آیا برای هر جدول ارزش دلخواه، می‌توان گزاره‌ای یافت که آن جدول ارزش را داشته باشد؟ پاسخ این سوال مثبت است و در لم زیر بدان پرداخته شده است.

لم ۲۳. برای هر تابع $F : \{۰, ۱\}^n \to \{۰, ۱\}$ یک گزاره‌ی $f(p_۱, ..., p_n)$ چنان یافت می‌شود که برای هر ارزیابی μ داشته باشیم

$$\mu(f(p_۱, ..., p_n)) = F(\mu(p_۱), ..., \mu(p_n)).$$

اثبات. فرض کنید $\{\mu_i | i \leq ۲^n\}$ شمارشی از کُلِّ نگاشتهای ارزیابی (محدود شده به گزاره‌های اتمیِ $p_۱, \ldots, p_n$) باشد. گزاره‌ی $f(p_۱, \ldots, p_n)$ به صورت زیر، دارای ویژگی خواسته شده در لم است:

$$\bigvee_{\{i|F(\mu_i(p_۱),\dots,\mu_i(p_n))=۱\}} \bigwedge_{j=۱,\dots,n} Q_{ij}$$

که در آن

$$Q_{ij} = \begin{cases} p_j & \text{اگر } \mu_i(p_j) = ۱ \\ \neg p_j & \text{اگر } \mu_i(p_j) = ۰ \end{cases}$$

به بیان ساده‌تر، اگر یک جدول ارزش داشته باشیم و بخواهیم گزاره‌ای با آن جدول ارزش پیدا کنیم، کافی است «فصلِ» سطرهائی را در نظر بگیریم که در آنها ارزش گزاره یک شده است. همچنین در هر کدام از این سطرها، عطف گزاره‌های اتمی و نقیض آنها را متناسب با ارزش آن گزاره‌ی اتمی در آن سطر در نظر می‌گیریم. (برای متوجه شدن این جملات به مثال زیر توجه کنید). $\square$

مثال ۲۴. گزاره‌ای پیدا کنید که جدول ارزش زیر را داشته باشد:

$p_۱$	$p_۲$	$p_۳$	$f(p_۱, p_۲, p_۳)$
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۱	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱
۱	۱	۱	۰

پاسخ. بنا به اثبات لم بالا گزاره‌ی مورد نظر به صورت زیر است:

$$f(p_۱, p_۲, p_۳) = (\neg p_۱ \wedge p_۲ \wedge p_۳) \vee (p_۱ \wedge \neg p_۲ \wedge p_۳) \vee (p_۱ \wedge p_۲ \wedge \neg p_۳).$$

$\square$

دقت کنید که در ساخت گزاره‌ی بالا، از نمادهای $\neg, \vee, \wedge$ استفاده کردیم. از این رو لم بالا را معمولاً بدین صورت بیان می‌کنند: مجموعه‌ی نمادهای منطقی $\{\neg, \vee, \wedge\}$ کامل است؛ یعنی هر جدول ارزشی را می‌توان با استفاده از این نمادها تولید کرد.

تمرین ۲۵. نشان دهید مجموعه‌ی $\{\neg, \wedge\}$ از نمادها کامل است.

دقت کنید که برای پاسخ دادن به تمرین بالا، کافی است نشان دهید که نمادِ $\vee$ از نمادهای $\neg, \wedge$ حاصل می‌شود.

تمرین ۲۶. اداتِ دوتایی | (بخوانید ادات شفر) را به صورت زیر در نظر بگیرید: (جدول ارزش آن را بکشید)

$$p \mid q := \neg(p \wedge q)$$

نشان دهید ادات شفر کامل است.

تمرین ۲۷. نشان دهید ادات $\downarrow$ ،(بخوانید اداتِ نُرْ) تعریف شده در زیر، کامل است.

$$p \downarrow q := \neg(p \vee q)$$

(جدول ارزش آن را نیز بکشید.)

تمرین ۲۸. نشان دهید تنها ادوات دوتاییِ [18] کامل همان $|$ و $\downarrow$ هستند.

تمرین ۲۹ (مندلسون)**.** فرض کنید که وارد شهری شده‌اید که هر یک از مردم آن یا همیشه راست می‌گوید یا همیشه دروغ، و تنها می‌تواند با بله و نه جواب دهد. سر یک دوراهی یکی از مردم شهر ایستاده است. چگونه می‌توانید با یک سوال راه درست را پیدا کنید؟

تعریف ۳۰.

۱. گزاره‌ی $f(p_1, ..., p_n)$ را یک تاتولوژی [19] می‌خوانیم، هرگاه برای هر تابع ارزیابی $\{0,1\} \to M : \mu$ داشته باشیم $\mu(f(p_1, ..., p_n)) = 1$. (به بیان دیگر، هرگاه در جدول ارزش این گزاره، در پایان هر سطر، ارزش ۱ داشته باشیم).

۲. دو گزاره‌ی ψ و φ را معادل می‌خوانیم و می‌نویسیم $\psi \equiv \varphi$ هرگاه $\psi \leftrightarrow \varphi$ یک تاتولوژی باشند(به بیان دیگر هرگاه جداول ارزش φ و ψ یکسان باشند.)

مثال ۳۱. چند تاتولوژی مهم را در زیر آورده‌ایم. سعی کنید تاتولوژی بودن آنها را با رسم جدول ارزش تحقیق کنید:

۱. $A \to (B \to A)$

۲. $A \wedge B \to A$

۳. $A \to A \vee B$

۴. $\neg\neg A \leftrightarrow A$

۵. $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to (A \to C))$

۶. $A \to (B \to A \wedge B)$

۷. $A \wedge B \to C \to A \to (B \to C)$

۸. $(A \vee B) \wedge \neg A \to B$

۹. $A \to (B \wedge \neg B) \to \neg A$.

۱۰. $(A \to B) \to ((C \to B) \to (A \vee C \to B))$

[18] یعنی ادواتی که دو گزاره‌ی اتمی در آنها به کار رفته است

[19] tautology

۱۱. $((A \to B) \wedge (\neg A \to B)) \to B$

۱۲. $(A \vee B \to C) \to (A \to C \wedge B \to C)$

رابطه‌ی معادل بودن دو گزاره، $\equiv$، یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی همه‌ی گزاره‌ها، PR است. بنابراین PR توسط این رابطه افراز می‌شود. مجموعه‌ی افرازهای این رابطه را با $PR/_{\equiv}$ نشان می‌دهیم. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $(PR/_{\equiv}, \wedge, \vee, \neg, [p \wedge \neg p], [p \vee \neg p])$ تشکیل یک جبر بولی می‌دهد.(این جبر بولی را جبرِ لیندن‌باوم ــ تارسکی می‌نامیم).

دقت کنید که گزاره‌ی $p \vee \neg p$ همواره درست است (یعنی تاتولوژی است). گزاره‌ی $p_۱ \wedge p_۲$ گاهی درست و گاهی غلط است. به گزاره‌ای که حداقل با یک ارزیابی درست باشد، **ارضاشدنی** یا **سازگار** [۲۰] می‌گوییم. مثلاً گزاره‌ی $p_۱ \wedge p_۲$ در صورتی که $\mu(p_۱) = \mu(p_۲) = ۱$، دارای ارزش یک است؛ پس ارضاشدنی است. به گزاره‌ای که ارضا شدنی نباشد، یک گزاره‌ی تناقض‌آمیز (یا یک تناقض) می‌گوییم. برای مثال $p \wedge \neg p$ یک تناقض است.

همان طور که متوجه شده‌اید، بررسی این‌که آیا گزاره‌ی $f(p_۱, ..., p_n)$ تاتولوژی است یا خیر نیاز به کشیدن یک جدول ارزش با ۲^n سطر دارد. یک سوال مهم این است که آیا روشی سریع‌تر برای تشخیص تاتولوژی بودن یک گزاره وجود دارد یا خیر. این مسأله معادل با یک مسأله‌ی باز در ریاضی و علوم رایانه‌ی نظری، به نام مسأله‌ی P=NP است.

برای توضیح بیشتر درباره‌ی مسأله‌ی P=NP مثال زیر را در نظر بگیرید. اگر یک پاسخ برای یک جدول سودوکو به ما بدهند، تشخیص این که آیا این پاسخ درست یا غلط است، آسان است. برای این کار کافی است تک تکِ سطرها و ستونهای پاسخ را چک کنیم و این کار زمان چندانی نمی‌برد. با این حال اگر یک جدول سودوکوی حل نشده به ما بدهند، حل کردنِ آن زمان زیادی می‌برد.

مسأله‌ی P=NP می‌پرسد که آیا هر مسأله‌ای که برای چک کردن درستی یک جواب از آن، یک الگوریتمِ سریع وجود دارد، برای حل آن نیز الگوریتمی سریع وجود دارد؟ منظور از یک الگوریتم سریع، الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای است. فرض کنید $p(x)$ یک چندجمله‌ای باشد. می‌گوییم یک الگوریتم دارای زمان $p(x)$ است هرگاه برای هر ورودیِ به طولِ x حداکثر پس از $p(x)$ مرحله بایستد.

پروژه ۳۲. برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی مسأله‌ی P=NP منبع زیر را مطالعه بفرمائید.
the importance of P vs NP question, Stephen Cook.

از سرکار خانم زهرا شیروانیان، برای قبول زحمت تایپ این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۴.۰ جلسه چهارم، گزاره های سازگار و قضیه فشردگی

در این جلسه می‌خواهم **لم فشردگی** [۲۱] را در منطق گزاره‌ها بیان و اثبات کنم. بنا به این لم (به بیان غیردقیق) **اگر بی‌نهایت پدیده داشته باشیم و بدانیم که هر تعداد متناهی از آنها می‌توانند همزمان رخ دهند، آنگاه تمام این پدیده‌ها می‌توانند همزمان با هم رخ دهند. در زیر این گفته را دقیق کرده‌ایم.**

تعریف ۳۳. گزاره های $\varphi_۱, \cdots, \varphi_n$ را با هم **سازگار** [۲۲] می نامیم هرگاه رخداد همزمان آنها با هم تناقض نباشد؛ یعنی یک

---

[۲۰] satisfiable, consistent
[۲۱] compactness
[۲۲] Consistent

تابع ارزیابی $\mu : M \to \{۰, ۱\}$ موجود باشد به طوری که

$$\mu(\varphi_۱) = \mu(\varphi_۲) = \cdots = \mu(\varphi_n) = ۱.$$

به بیان دیگر هرگاه در جدول ارزش گزاره $\varphi_n \wedge \cdots \wedge \varphi_۱$ در حداقل یک سطر ارزش ۱ داشته باشیم. همچنین مجموعه‌ی متناهیِ Δ از گزاره‌ها را سازگار می‌خوانیم هرگاه گزاره‌ی $\bigwedge_{\phi\in\Delta} \phi$ سازگار باشد.

پس سازگار بودن یک تعداد متناهی گزاره، به معنی این است که وقوع همزمان آنها با هم تناقض نباشد. می‌دانیم که در منطق گزاره‌ها، گزاره‌ای به صورتِ $\ldots \wedge \phi_۲ \wedge \phi_۱$ (یعنی یک عطف بی‌نهایت) نداریم. با این حال در زیر به نحوه‌ی بررسی ارزش همزمان بی‌نهایت گزاره پرداخته‌ایم.

تعریف ۳۴. فرض کنید Σ مجموعه‌ای **نامتناهی** از گزاره‌ها باشد. مجموعه Σ را **متناهیاً سازگار** (متناهیا ارضاپذیر) [۲۳] می نامیم هرگاه **هر** زیرمجموعه‌ی متناهیِ $\Delta \subseteq \Sigma$ سازگار باشد. همچنین Σ را **سازگار** می‌خوانیم هرگاه تابع ارزیابی μ چنان موجود باشد که برای هر $\varphi \in \Sigma$ داشته باشیم $\mu(\varphi) = ۱$. به بیان غیرفنی، یعنی یک تابع ارزیابی وجود داشته باشد که بگوید $\bigwedge_{\varphi\in\Sigma} \varphi$ (که یک عطف نامتناهی است) امکان پذیر است.

قضیه ۳۵ (فشردگی)**.** اگر Σ متناهیاً سازگار باشد، آنگاه Σ سازگار است.

برای اثبات قضیه‌ی بالا نیاز به لم زُرن [۲۴] داریم (که شما آن را در درس مبانی ریاضی فراگرفته‌اید). فرض کنید یک مجموعه‌ی مرتب جزئی داشته باشیم و بدانیم که اگر از هر عنصر شروع کنیم و یک زنجیر صعودی بسازیم، عنصری هست که از تمام عناصر زنجیر ما بزرگتر است. آنگاه بنا به لم زرن، در مجموعه‌ی ما عنصری وجود دارد که در انتهای زنجیر ما قرار می‌گیرد (یعنی زنجیر را نمی‌توانیم از آن بیشتر ادامه دهیم). به بیان دیگر فرض کنید که یک درخت با نامتناهی شاخه داریم که هر شاخه تا بی‌نهایت پیش می‌رود. از طرفی در هر شاخه که هستیم می‌دانیم که عنصری بزرگتر از همه‌ی عناصر آن شاخه در مجموعه‌ی ما موجود است. در این صورت هر شاخه را اگر ادامه دهیم به یک **انتهای مشخص** می‌رسیم. بهتر است این لم را به صورت دقیق و ریاضی بیان کنیم. (در صورتی که در فهم لم زرن مشکل دارید، حتما به جزوه‌ی درس مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید.)

می‌گوییم $(A, \sqsubseteq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است هرگاه $\sqsubseteq$ یک رابطه‌ی ترتیبی باشد، با این تفاوت که لزوماً هر دو عنصر با هم قابل مقایسه نباشند. یک مجموعه‌ی مرتب جزئی را می‌توان به صورت یک درخت تجسم کرد. زیرمجموعه‌ی $B \subseteq A$ را یک زنجیر در A می‌خوانیم هرگاه هر دو عنصر در B با هم قابل مقایسه باشند. به بیان دیگر هرگاه

$$\forall a, b \in B \quad (a \sqsubseteq b) \vee (b \sqsubseteq a).$$

لم ۳۶ (لم زُرْن)**.** فرض کنید $(A, \sqsubseteq)$ یک مجموعه مرتب جزئی **ناتهی** باشد به طوری که هر زنجیر $\{a_i\}_{i\in I}$ از عناصر A دارای یک کران بالا در A باشد. (یعنی $\exists a \in A \;\; \forall i \in I \;\; a_i \leq a$). آنگاه A دارای یک عنصر ماکزیمال است؛ یعنی

$$\exists a \in A \;\; \nexists x \in A \;\; x > a$$

[۲۳] finitely satisfiable
[۲۴] Zorn's lemma

لم زرن را در درسهای آینده ثابت خواهیم کرد. فعلاً بیایید به سمت اثبات قضیه‌ی فشردگی پیش برویم.

فرض کنید Σ یک مجموعه متناهیاً سازگار از گزاره‌ها باشد. هدفمان پیدا کردن یک تابع ارزیابی $\mu : M \to \{۰, ۱\}$ است به طوری که برای هر $\varphi \in \Sigma$ داشته باشیم $\mu(\varphi) = ۱$.

لم ۳۷. فرض کنید Σ یک مجموعه متناهیاً سازگار باشد. آنگاه یک مجموعه متناهیاً سازگارِ ماکزیمالِ $\Sigma' \supset \Sigma$ از گزاره‌ها موجود است. یعنی یک مجموعه‌ی Σ' موجود است، به طوری که

۱. $\Sigma' \supseteq \Sigma$

۲. Σ' متناهیاً سازگار است،

۳. هیچ مجموعه‌ای از گزاره‌ها نیست که متناهیاً سازگار باشد و شاملِ Σ' باشد.

اثبات به کمک لم زُرْن. مجموعه $\mathcal{A}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{A} = \{\Gamma \ | \Gamma \supseteq \Sigma \text{ و } \text{مجموعه‌ای از گزاره‌هاست که متناهیاً سازگار است} \ \Gamma\}$$

دقت کنید که $\mathcal{A} \neq \emptyset$ زیرا $\Sigma \in \mathcal{A}$. روی $\mathcal{A}$ ترتیب جزئی زیر را تعریف کنید:

$$\Gamma_۱ \sqsubseteq \Gamma_۲ \Longleftrightarrow \Gamma_۱ \subseteq \Gamma_۲.$$

فرض کنید $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر در $\mathcal{A}$ باشد. توجه کنید که برای هر $j \in I$ داریم $\Gamma_j \sqsubseteq \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ (یعنی این زنجیر کران بالا دارد؛ کافی است نشان دهیم که این کران بالا در $\mathcal{A}$ واقع است).

ادعا. $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i \in \mathcal{A}$.

اثبات ادعا. کافی است نشان دهیم که $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ متناهیاً سازگار است.

فرض کنید $\varphi_۱, \cdots, \varphi_n \in \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$. بنابراین

$$\begin{array}{l} \exists i_۱ \in I \quad \varphi_۱ \in \Gamma_{i_۱} \\ \quad\quad\quad \vdots \\ \exists i_n \in I \quad \varphi_n \in \Gamma_{i_n} \end{array}$$

بدون کاستن از کلیت فرض کنید $i_۱ < i_۲ < \cdots < i_n$. از آنجا که $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر است، در این صورت داریم: $\Gamma_{i_۱} \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_{i_n}$؛ بنابراین $\varphi_۱, \cdots, \varphi_n \in \Gamma_{i_n}$. از آنجا که $\Gamma_{i_n} \in \mathcal{A}$ پس Γ_{i_n} متناهیاً سازگار است؛ پس $\varphi_۱, \cdots, \varphi_n$ با هم سازگارند.

پایان اثبات ادعا. □

پس دیدیم که $(\mathcal{A}, \sqsubseteq)$ در شرایط لم زرن صدق می‌کند. پس $\mathcal{A}$ دارای یک عنصر ماکزیمال است. این عنصر ماکزیمال، همان مجموعه‌ی Σ' است که به دنبال آن بودیم. **از این لحظه به بعد این مجموعه را** Σ_{max} **می‌نامیم.** □

تمرین ۳۸. نشان دهید که برای هر گزاره دلخواهِ φ یا $\varphi \in \Sigma_{max}$ یا $\neg\varphi \in \Sigma_{max}$. (راهنمایی: اگر $\varphi \notin \Sigma_{max}$ نشان دهید که مجموعه $\Sigma_{max} \cup \{\neg\varphi\}$ متناهیاً سازگار است. از این نتیجه بگیرید که $\neg\varphi \in \Sigma_{max}$)

لمِ ۳۷ را با فرض شمارا بودن تعداد کل گزاره‌ها می‌توان راحت‌تر ثابت کرد. در این صورت برای یافتن مجموعه‌ی Σ_{max} یکی یکی به Σ گزاره اضافه می‌کنیم.

اثبات لمِ ۳۷ با فرض شمارا بودن تعداد کل گزاره‌ها. با فرض این که مجموعه‌ی همه گزاره ها شمارا و برابر با $\{\varphi_۰, \varphi_۱, \cdots\}$ باشد، ادعا می‌کنیم که برای هر گزاره‌ی φ یا $\Sigma \cup \{\varphi\}$ متناهیاً سازگار است یا $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ متناهیاً سازگار است. پس در هر مرحله‌ی i یا φ_i یا $\neg\varphi_i$ را به Σ اضافه می‌کنیم تا به یک مجموعه متناهیاً سازگار ماکزیمال برسیم.

برای اثبات ادعا، فرض کنیم $\Sigma \cup \{\varphi\}$ متناهیاً سازگار نباشد. پس مجموعه متناهی $\Delta_۰ \subseteq \Sigma$ موجود است به طوری که $\Delta_۰ \cup \{\varphi\}$ ناسازگار است. یعنی اگر μ یک تابع ارزیابی باشد که برای هر $\psi \in \Delta_۰$ داشته باشیم $\mu(\psi) = ۱$ آنگاه $\mu(\varphi) = ۰$. ادعا می‌کنیم که $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ متناهیا سازگار است. فرض کنید $\Delta \subseteq \Sigma$ مجموعه‌ای متناهی باشد. ادعا می‌کنیم که $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ سازگار است. می‌دانیم که $\Delta \cup \Delta_۰$ سازگار است (زیرا Σ متناهیاً سازگار است). پس یک ارزیابی μ وجود دارد که برای هر $\psi \in \Delta \cup \Delta_۰$ داریم $\mu(\psi) = ۱$. از آنجا که μ روی $\Delta_۰$ برابر ۱ است بنابر بالا $\mu(\varphi) = ۰$؛ یعنی $\mu(\neg\varphi) = ۱$. پس $\Delta \cup \Delta_۰ \cup \{\neg\varphi\}$ سازگار است یعنی $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ سازگار است.

$\square$

حال همه‌ی مقدمات لازم را برای اثبات لم فشردگی در اختیار داریم.

اثبات لمِ فشردگی. فرض کنید Σ یک مجموعه متناهیاً سازگار از گزاره ها باشد. بنابر لم قبل یک مجموعه‌ی متناهیاً سازگار ماکزیمال $\Sigma \subseteq \Sigma_{max}$ وجود دارد. در تمرین ۳۸ دیدیم که برای هر گزاره φ یا $\varphi \in \Sigma_{max}$ یا $\neg\varphi \in \Sigma_{max}$. تابع ارزیابی $\mu : M \to \{۰, ۱\}$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$\mu(p) = ۱ \iff p \in \Sigma_{max}.$$

ادعا می‌کنیم که برای هر گزاره‌ی دلخواهِ φ داریم

$$\mu(\varphi) = ۱ \iff \varphi \in \Sigma_{max}$$

$\square$

این ادعا را با استقراء روی ساخت گزاره‌ها ثابت می‌کنیم. یعنی نشان می‌دهیم که حکم ادعا برای گزاره‌های اتمی درست است؛ اگر برای گزاره‌های $\psi_۱, \psi_۲$ درست باشد برای گزاره‌ی $\psi_۱ \wedge \psi_۲$ درست است؛ و اگر برای گزاره‌ی ψ درست باشد، برای گزاره‌ی $\neg\psi$ هم درست است. از اینها نتیجه می شود که حکم مورد نظر برای همه‌ی گزاره‌ها درست است.

فرض کنید $\varphi \in \Sigma_{max}$ یک گزاره اتمی باشد. آنگاه بنابر **تعریف** μ داریم

$$\mu(\varphi) = ۱ \Leftrightarrow \phi \in \Sigma_{max}.$$

فرض کنید حکم برای ψ درست باشد. پس

$$\psi \in \Sigma_{max} \Leftrightarrow \mu(\psi) = ۱.$$

بنا به تمرینِ ۳۸ می‌دانیم که

$$\neg\psi \in \Sigma_{max} \Leftrightarrow \psi \notin \Sigma_{max}.$$

پس

$$\neg\psi \in \Sigma_{max} \Leftrightarrow \mu(\neg\psi) = 1.$$

سرآخر فرض کنید که $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ و حکم برای ψ_1, ψ_2 درست باشد. اگر $\phi \in \Sigma_{max}$ آنگاه بنا به ماکزیمال بودن و سازگاری داریم $\psi_1, \psi_2 \in \Sigma_{max}$. پس

$$\mu(\psi_1) = \mu(\psi_2) = 1 = \mu(\psi_1 \wedge \psi_2).$$

تمرین ۳۹. برای به پایان رساندن اثبات نشان دهید که اگر $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2 \notin \Sigma_{max}$ آنگاه $\mu(\phi) = 0$.

پس ثابت کردیم که μ به همه‌ی گزاره‌های موجود به Σ_{max} ارزش ۱ می دهد. واضح است که ارزش گزاره‌های موجود در Σ نیز از نظرِ μ برابر با یک است و این اثبات حکم را به پایان می‌رساند.

تمرین ۴۰. قضیه‌ی فشردگی (در منطق گزاره‌ها) را می‌توان با استفاده از ویژگی‌های توپولوژیک فضاهای فشرده نیز اثبات کرد. اثباتی توپولوژیک برای این قضیه بیابید (در کلاس تمرین این اثبات شرح داده خواهد شد).

از آقای امیر نیک‌آبادی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۵.۰ جلسه‌ی پنجم یک کاربرد از قضیه‌ی فشردگی و صورتهای نُرمال

۱.۵.۰ یک کاربرد از قضیه‌ی فشردگی

یادآوری می‌کنم که بنا به قضیه‌ی فشردگی درمنطق گزاره‌ها، اگر Σ یک مجموعه‌ی نامتناهی از گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها باشد و برای هر تعداد متناهی گزاره‌ی $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Sigma$ یک نگاشت ارزیابی $\mu : M \to \{0, 1\}$ موجود باشد به طوری‌که $\mu(\varphi_1) = \mu(\varphi_2) = ... = \mu(\varphi_n) = 1$ آنگاه Σ سازگار است؛ یعنی ارزیابی $\mu' : M \to \{0, 1\}$ موجود است که برای هر $\varphi \in \Sigma$ داریم $\mu(\varphi) = 1$. به بیان دیگر، اگر Σ یک مجموعه‌ی متناقض از گزاره‌ها باشد، آنگاه تناقضْ از بخشی متناهی از Σ ناشی می‌شود. (چرا این بیان با بیان قبلی معادل است؟)

تمرین ۴۱. (اردشیر) فرض کنید $\{A_1, A_2, ...\}$ مجموعه‌ای نامتناهی از گزاره‌ها باشد. فرض کنید برای هر تابع ارزش μ یک گزاره‌ی A_m موجود باشد به طوری‌که $\mu(A_m) = 1$. نشان دهید که $m \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری‌که $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_m$ تاتولوژی است.

در ادامه‌ی درس، بنا به درخواست شما کاربردی از قضیه‌ی فشردگی را بیان می‌کنم. فرض کنید G یک گراف (ساده [25])باشد. می‌گوییم گراف G یک گراف N رنگ‌پذیر است هر گاه بتوان به هر رأس آن یک رنگ از میان رنگ‌های {رنگ۱، رنگ۲، ...، رنگN} نسبت داد به طوری‌که هیچ دو رأس مجاور همرنگ نباشند. در زیر این قضیه را با استفاده از فشردگی ثابت کرده‌ایم.

[25] یعنی جهتدار نباشد

قضیه ۴۲. (اردوش [۲۶]) فرض کنید G یک گراف نامتناهی باشد. آنگاه گراف G با فرض N رنگ‌پذیر بودن هر زیرگراف متناهی از آن، N رنگ‌پذیر است.

اثبات. قضیه را برای وقتی که $N = ۴$ ثابت کرده‌ایم، ولی اثبات در حالت کلی نیز مشابه همین است. فرض کنید G یک گراف نامتناهی و هر زیرگراف متناهی از آن ۴رنگ‌پذیر باشد. مجموعه‌ی رنگهای زیر را در نظر بگیرید:

{سفید،مشکی،زرد،سبز}

وضعیت گراف G را به همراه امکان ۴رنگ‌پذیری آن در مجموعه‌های زیر از گزاره‌ها شرح می‌دهیم.
مجموعه‌های زیر از گزاره‌ها را در نظر بگیرید:

$\Sigma_۱ =$ {در گراف G این‌گونه باشد. | رأس $g_۱$ به رأس $g_۲$ وصل است.}

$\Sigma_۲ =$ { (رأس g سفید است)$\vee$(رأس g زرداست)$\vee$(رأس g مشکی است)$\vee$(رأس g سبز است) | $g \in G$}

$\Sigma_۳ =$ { اگر $g_۱$ سبز باشد آنگاه $g_۲$ سبز نباشد $\wedge$

اگر $g_۱$ سفید باشد آنگاه $g_۲$ سفید نباشد $\wedge$

اگر $g_۱$ مشکی باشد آنگاه $g_۲$ مشکی نباشد $\wedge$

اگر $g_۱$ زرد باشد آنگاه $g_۲$ زرد نباشد $\wedge$

| $g_۱$ به $g_۲$ وصل است.}

$\Sigma_۴ =$ {(g همزمان سفید و زرد نیست.) $\wedge$ (g همزمان سفید و مشکی نیست.) $\wedge \ldots \mid g \in G$}

دقت کنید که اگر $\Sigma = \Sigma_۱ \cup \Sigma_۲ \cup \Sigma_۳ \cup \Sigma_۴$ سازگار باشد آن‌گاه گراف G یک گرافِ ۴ رنگ‌پذیر است.

بنا به قضیه‌ی فشردگی برای اثبات سازگاریِ Σ کافی است نشان دهیم هر زیرمجموعه‌ی متناهی از آن سازگار است. فرض کنید $\Delta \subseteq \Sigma$ متناهی باشد. فرض کنید در Δ درباره‌ی رأس‌های $g_۱, g_۲, ..., g_n$ گزاره‌هایی وجود داشته باشد. به Δ گزاره‌هایی از Σ اضافه می‌کنیم به طوری‌که به $\Delta \subseteq \Delta'$ برسیم و Δ' بیانگر این باشد که $g_۱, g_۲, ..., g_n$ رأس‌های یک زیرگراف از G هستند و این زیرگراف ۴رنگ‌پذیراست. از آن‌جا که زیرگراف یاد شده، بنا به فرض سؤال، ۴رنگ‌پذیراست، مجموعه‌ی Δ' و به تَبَعِ آن Δ، سازگار است.

به بیان دقیقتر برای اثبات سازگاریِ Δ' باید یک ارزیابی از گزاره‌های اتمی پیدا کنیم که با آن ارزیابی همه‌ی جملاتِ به کار رفته در Δ' ارزشِ یک داشته باشند. جملاتِ اتمی ما در اینجا گزارهایی مانندِ رأس فلان به راس فلان وصل است» و رأس فلان، فلان رنگ را دارد» هستند. کافی است برای ارزش‌دهی به آنها به زیرگرافِ ساخته شده توسط رأسهای $g_۱, \ldots, g_n$ مراجعه کنیم و اگر جمله‌ی ما درباره‌ی این گراف درست بود به آن ارزشِ یک بدهیم. $\square$

[۲۶] Erdös

۲.۵.۰ صورتهای نرمال

لم ۴۳. هر گزاره‌ای در منطق گزاره‌ها را می‌توان در «صورت نرمال فصلی [۲۷] » نوشت؛ یعنی اگر φ یک گزاره‌ی دلخواه باشد، آنگاه گزاره‌ای به شکل زیر وجود دارد که با φ معادل است:

$$\bigvee_{i=۱...n} c_i$$

که هر c_i به صورت $(q_۱ \wedge q_۲ \wedge ... \wedge q_m)$ است و هر q_j یک گزاره‌ی اتمی یا نقیض یک گزاره‌ی اتمی است.

مثال ۴۴. گزاره‌ی زیر در صورت نرمال فصلی است:

$$(p_۱ \wedge p_۲ \wedge p_۳) \vee (\neg p_۴ \wedge p_۵ \wedge \neg p_۶) \vee (p_۷ \wedge p_۶ \wedge p_۳ \wedge \neg p_۲).$$

اثبات لم. اثبات اول: دو گزاره در صورتی معادلند که جدول ارزش یکسانی داشته باشند. همچنین قبلاً دیدیم که هر جدول ارزشی را می‌توان با یک گزاره‌ی در صورت نرمال فصلی به دست آورد.

اثبات دوم، با استقراء روی ساختِ گزاره‌ها:

۱. اگر φ یک گزاره‌ی اتمی باشد آنگاه حکم بوضوح برقرار است.

۲. اگر حکم برای φ درست باشد، نشان می‌دهیم که آنگاه حکم برای $\neg\varphi$ هم درست است. برای جلوگیری از پیچیدگی نمادها، تنها به بیان ایده‌ی اثبات اکتفا کرده‌ام: فرض کنید

$$\varphi : (p_۱ \wedge \neg p_۲) \vee (p_۳ \wedge p_۴)$$

آنگاه

$$\neg\varphi : \neg(p_۱ \wedge \neg p_۲) \wedge \neg(p_۳ \wedge p_۴) \equiv$$

$$(\neg p_۱ \vee p_۲) \wedge (\neg p_۳ \vee \neg p_۴) \equiv$$

$$((\neg p_۱ \vee p_۲) \wedge \neg p_۳) \vee ((\neg p_۱ \vee p_۲) \wedge \neg p_۴) \equiv$$

$$(\neg p_۱ \wedge \neg p_۳) \vee (p_۲ \wedge \neg p_۳) \vee (\neg p_۱ \wedge \neg p_۴) \vee (p_۲ \wedge \neg p_۴)$$

گزاره‌ی آخری در صورت نرمال فصلی است.

۳. حال فرض کنیم φ و ψ را بتوان به صورت نرمال فصلی نوشت. می‌دانیم که فصلِ دو گزاره در صورت نرمال فصلی، خودْ در صورت نرمال فصلی است. در قسمت قبل نیز دیدیم که اگر ϕ در صورت نرمال فصلی باشد، می‌توان نقیض آن را در صورت نرمال فصلی نوشت. پس داریم

$$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv \neg(\text{نرمال فصلی} \vee \text{نرمال فصلی}) \equiv \neg(\text{نرمال فصلی}) \equiv \text{نرمال فصلی}$$

[۲۷] disjunctive normal form

$\square$

تمرین ۴۵. گزاره‌های زیر را به صورت نرمال فصلی درآورید.

- $p \to (q \to p)$
- $((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$
- $p \wedge q \to r$
- $(A \vee B) \to (\neg B \wedge A)$
- $\neg(A \to B) \vee (\neg A \vee C)$.

تمرین ۴۶. نشان دهید هر گزاره را می‌توان در «صورت نرمال عطفی [۲۸] » نوشت؛ یعنی به صورت زیر

$$\bigwedge_{i=1..n} c_i$$

که در آن

$$c_i = (q_1 \vee q_2 \vee ... \vee q_m)$$

و هر q_i یک گزاره‌ی اتمی یا نقیض یک گزاره‌ی اتمی است.

مثال ۴۷. $(p_1 \vee p_2) \wedge (p_3 \vee \neg p_4)$ در صورت نرمال عطفی است.

در جلسه‌ی بعد روشی برای تشخیص تاتولوژی بودن یک گزاره‌ی در صورت نرمال فصلی معرفی می‌کنیم.

از آقای علیرضا محمدصالحی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۶.۰ جلسه‌ی ششم، روش انتاج

در جلسه‌ی قبل دیدیم که هر گزاره را در منطق گزاره‌ها می‌توان به صورت نرمال فصلی [۲۹] نوشت؛ یعنی به صورت زیر

$$\bigvee_{i=1}^{n} c_i$$

$$c_i = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$$

$$q_i = p_i \text{ یا } \quad q_i = \neg p_i$$

[۲۸] conjunctive normal form

[۲۹] DNF

در زیر روشی به نام «روش انتاج» [۳۰] معرفی کرده‌ایم که توسط آن تشخیص تاتولوژی بودن این گونه گزاره‌ها نسبتاً سریع صورت می‌گیرد. (یادمان باشد که در حالت کلی، وجود روشی سریع برای تشخیص تاتولوژی بودن یک گزاره، معادل با مسئله‌ی $p = np$ است).

۱.۶.۰ روش اِنْتاج

پیش از آن وارد بحث شویم دقت کنید که گزاره‌ی $p \vee \neg p$ بوضوح یک تاتولوژی است. روش انتاج بر یک مشاهده‌ی ساده استوار است که در مثال بعد بدان اشاره کرده‌ایم.

مثال ۴۸. اگر Q, Q' گزاره‌های دلخواهی باشند به طوری که $Q \wedge Q'$ تاتولوژی باشد، آنگاه $(\overset{\text{اتمی}}{\overset{\uparrow}{p}} \wedge \overset{\text{دلخواه}}{\overset{\uparrow}{Q}}) \vee (\neg p \wedge Q')$ یک تاتولوژی است. (اثبات کنید).

فرض کنید $\bigvee c_i$ گزاره‌ای در صورت نرمال فصلی باشد. هر $c_i = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ را نخست به صورت مجموعه‌ای بنویسید؛ یعنی قرار دهید:

$$c_i = \{q_1, \ldots, q_n\}$$

دقت کنید که هر q_i یا اتمی است یا نقیض اتمی. به هر c_i (که به صورت مجموعه‌ای نوشته شده باشد) یک «عبارت» می‌گوییم. همچنین هر q_i را یک «کلمه» در این عبارت می‌خوانیم. بیایید مجموعه‌ی همه‌ی عبارات به کار رفته در ϕ را به صورت زیر نشان دهیم:

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$$

تعریف ۴۹. اگر $c_1 = \{p\} \cup Q$ و $c_2 = \{\neg p\} \cup Q'$ دو عبارت باشند، آنگاه $Q \cup Q'$ را یک **مُنتَج** از c_1 و c_2 می‌خوانیم.

مثال ۵۰. مجموعه‌ی $\emptyset$ منتجِ عباراتِ $\{p\} \cup \emptyset$ و $\{\neg p\} \cup \emptyset$ است.

قضیه ۵۱ (انتاج)**.** گزاره‌ی φ، که در حالت نرمالِ فصلی نوشته شده است، یک تاتولوژی است **اگر و تنها اگر** با ایجاد متوالیِ منتجها در روش انتاج در جایی به مجموعه‌ی $\emptyset$ برسیم.

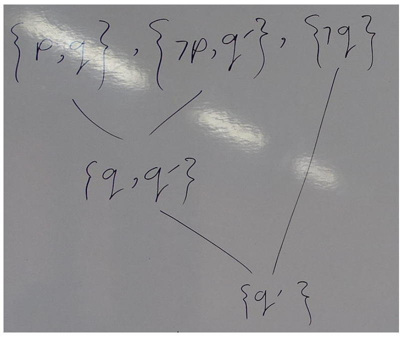
پیش از آن که قضیه‌ی بالا را اثبات کنیم، نحوه‌ی استفاده از آن را در چند مثال بررسی می‌کنیم.

مثال ۵۲. با روش انتاج بررسی کنید که عبارت زیر تاتولوژی است یا خیر.

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q') \vee \neg q$$

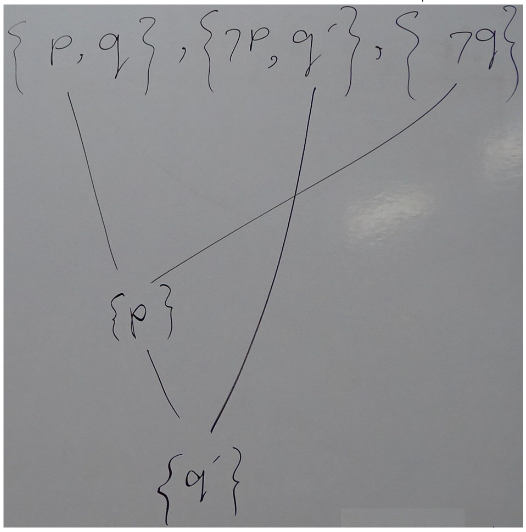
پاسخ. روش اول.

[۳۰] Resolution Method



پس گزاره‌ی فوق تاتولوژی نیست.

روش دوم.



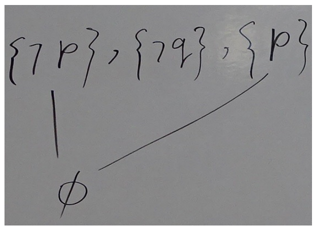
پس با این روش نیز گزاره‌ی فوق تاتولوژی نیست. □

مثال ۵۳. با استفاده از روش انتاج تاتولوژی بودن عبارت زیر را بررسی کنید.

$$p \to (q \to p)$$

پاسخ.

$$p \to (q \to p) \equiv \neg p \vee (q \to p) \equiv \neg p \vee (\neg q) \vee p$$



درنتیجه گزاره‌ی بالا تاتولوژی است. □

تمرین ۵۴. با استفاده از روش انتاج نشان دهید گزاره‌های زیر تاتولوژی هستند.

$$\big((p \to q) \wedge (\neg p \to q)\big) \to q$$

$$\neg\neg A \to A$$

اثبات قضیه‌ی انتاج. نخست نشان می‌دهیم که اگر با به کارگیری روش انتاج برای گزاره‌ی φ به تهی برسیم، گزاره‌ی φ تاتولوژی است. دقت کنید که اگر $\mathcal{C}'$ یک مجموعه از **عبارات** باشد که پس از یک مرحله انتاج از $\mathcal{C}$ به دست آمده است، آنگاه اگر گزاره‌ی متناظر با $\mathcal{C}'$ تاتولوژی باشد، آنگاه گزاره‌ی متناظر با $\mathcal{C}$ نیز تاتولوژی است. به بیان ساده‌تر اگر $(Q \wedge Q') \vee \psi$ تاتولوژی باشد آنگاه

$$(p \wedge Q) \vee (\neg p \wedge Q') \vee \psi$$

که در مرحله‌ی قبل قرار دارد، تاتولوژی است. تمرین زیر را در پرانتز در نظر بگیرید:

تمرین ۵۵. آیا عکس این گفته نیز برقرار است؟ یعنی اگر $(p \wedge Q) \vee (\neg p \wedge Q')$ تاتولوژی باشد آیا $Q \wedge Q'$ تاتولوژی است؟

همچنین دقت کنید که اگر با به کار گیری روش انتاج در جائی به تهی برسیم، حتماً در مرحله‌ی قبل از آن عبارتی به صورت زیر داشته‌ایم:

$$(p) \vee (\neg p) \vee \psi$$

که این گزاره نیز تاتولوژی است. پس برای راحتی $\emptyset$ را یک تاتولوژی می‌نامیم و گفته‌های بالا را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

اگر جمله‌ای که پس از یک مرحله از انتاج به دست بیاید تاتولوژی باشد، جمله‌ی مرحله‌ی قبلی (یعنی قبل از انتاج) تاتولوژی بوده است. پس اگر در جایی به تهی برسیم یعنی در همه‌ی مراحلِ قبل تاتولوژی داشته‌ایم، و به ویژه گزاره‌ای که با آن آغاز کرده‌ایم تاتولوژی بوده است.

حال باید حکم سخت‌تر را ثابت کنیم. یعنی این را ثابت کنیم که اگر گزاره‌ی مورد نظر تاتولوژی باشد با اعمال روش انتاج به آن حتماً به تهی می‌رسیم. این حکم را می‌خواهیم با استقراء روی اتمهای به کار رفته در گزاره‌ی مورد نظرمان ثابت کنیم.

فرض کنید گزاره‌ی φ تاتولوژی باشد. فرض کنید گزاره‌ی $\varphi|_{p=T}$ گزاره‌ای باشد که با قرار دادن T به جای p از گزاره‌ی φ بدست آید. مثلاً اگر

$$\varphi = \underbrace{(p \wedge Q)}_{T \wedge Q = Q} \vee \underbrace{(\neg p \wedge Q')}_{\cancel{\bot \wedge Q'}} \vee (r \wedge r')$$

آنگاه

$$\varphi|_{p=T} = Q \vee (r \wedge r')$$

همچنین فرض کنید $\varphi'|_{p=T}$ گزاره‌ای باشد که با حذف عبارت شاملِ نقیضِ p در φ به دست آید. در مثال بالا داریم

$$\varphi'|_{p=T} = (p \wedge q \wedge r) \vee (r_1 \wedge r_2 \wedge p).$$

مشاهده کنید که

- تعداد اتمهای به کار رفته در هر دو گزاره‌ی $\varphi|_{p=T}, \varphi'|_{p=T}$ از تعداد اتمهای به کار رفته در ϕ کمتر است.

- از آنجا که ϕ تاتولوژی است گزاره‌ی $\varphi|_{p=T}$ نیز تاتولوژی است (واضح است؛ زیرا ارزش ϕ به ارزش p بستگی ندارد).

- فرض کنید که بدانیم که اگر روش انتاج را برای گزاره‌ی $\varphi|_{p=T}$ به کار ببریم، به تهی برسیم؛ آنگاه اگر این روش را برای گزاره‌ی $\varphi'|_{p=T}$ به کار ببریم یا به تهی می‌رسیم یا به $\{p\}$. علت این است که عباراتِ به کار رفته در گزاره‌ی $\varphi'|_{p=T}$ تنها در داشتن یا نداشتنِ p با عبارات به کار رفته در $\varphi|_{p=T}$ تفاوت دارند.

حال به طور مشابه فرض کنید گزاره‌ی $\varphi|_{p=F}$ گزاره‌ای باشد که با قرار دادن F به جای p از گزاره‌ی φ بدست آید (یعنی با فرض این که p غلط است). همچنین فرض کنید $\varphi'|_{p=F}$ گزاره‌ای باشد که با حذف عبارت شاملِ p در φ به دست آید. دوباره مشاهدات مشابهی داریم:

- تعداد اتمهای به کار رفته در هر دو گزاره‌ی $\varphi|_{p=F}, \varphi'|_{p=F}$ از تعداد اتمهای به کار رفته در ϕ کمتر است.
- از آنجا که ϕ تاتولوژی است گزاره‌ی $\varphi|_{p=F}$ نیز تاتولوژی است (واضح است؛ زیرا ارزش ϕ به ارزش p بستگی ندارد).
- فرض کنید که بدانیم که اگر روش انتاج را برای گزاره‌ی $\varphi|_{p=F}$ به کار ببریم، به تهی برسیم؛ آنگاه اگر این روش را برای گزاره‌ی $\varphi'|_{p=F}$ به کار ببریم یا به تهی می‌رسیم یا به $\{\neg p\}$. علت این است که عباراتِ به کار رفته در گزاره‌ی $\varphi'|_{p=F}$ تنها در داشتن یا نداشتنِ $\neg p$ با عبارات به کار رفته در $\varphi|_{p=F}$ تفاوت دارند.

حال از آنجا که گزاره‌های $\varphi|_{p=F}$ و $\varphi|_{p=F}$ تاتولوژی هستند و از گزاره‌ی ϕ کوچکترند، بنا به فرض استقرا، با اعمال روش انتاج به هر کدام از آنها به تهی می‌رسیم. از طرفی بنا به مشاهدات بالا، با اعمال روش انتاج به هر یک از گزاره‌های $\varphi'|_{p=T}, \varphi'|_{p=F}$ یا به تهی می‌رسیم یا حالاتی که در بالا شرح داده شد رخ می‌دهد. دقت کنید که

$$\varphi = \varphi'|_{p=T} \vee \varphi'|_{p=F}$$

حال اگر با اعمال روش انتاج به یکی از $\varphi'|_{p=T}, \varphi'|_{p=F}$ به تهی برسیم، یعنی با اعمال انتاج به φ به تهی رسیده‌ایم و حکم ثابت می‌شود. اگر با اعمال انتاج در هیچکدام از آنها به تهی نرسیم یعنی در یکی به $\{p\}$ و در دیگری به $\{\neg p\}$ رسیده‌ایم. حال با یک بار دیگر به کار گیریِ انتاج، به تهی می‌رسیم. $\square$

تمرین ۵۶. یک روش انتاج برای گزاره‌های در حالت نرمال عطفی معرفی کنید و قضیه‌ای مشابه قضیه‌ی بالا در مورد آن ثابت کنید.

۷.۰ جلسه هفتم، شروع منطق مرتبه اول، ترمها و فرمولها

در جلسات قبل با منطق گزاره‌ها آشنا شدیم. دیدیم که در منطق گزاره‌ها، ارزش هر گزاره‌ای تنها به ارزش اتمهای به کار رفته در آن بستگی دارد و ارزش یک گزاره از روی اتمهای آن، توسط قوانین موجود در جبر بولیِ $\{۰, ۱\}$ تعیین می‌شود. قوانین منطق گزاره‌ها، بر تمام گزاره‌های ریاضی نیز حاکم هستند. مثلاً اگر $\phi \vee \psi$ یک گزاره‌ی ریاضی باشد، این گزاره تنها در صورتی درست است که حداقل یکی از ϕ یا ψ درست باشند. یا گزاره‌ی $\phi \wedge \psi$ تنها در صورتی درست است که هم ϕ و هم ψ درست باشد. در واقع منطق گزاره‌ها، منطق حاکم بر فکر ریاضی است.

با این حال، برای بیان و بررسی بخش اعظمی از حقایق ریاضی، به یک منطق کاملتر به نام «منطق مرتبه‌ی اول» [۳۱] نیاز داریم (که البته در بنای آن هم منطق گزاره‌ها به نحو جدی گنجانده شده است).

معرفی منطق مرتبه‌ی اول دقیقاً مانند معرفی هر منطق فکری دیگر است. مثلاً برای فکر در زبان فارسی، نخست باید الفبای آن را بشناسیم، سپس روش «کلمه‌سازی» و پس از آن روش «جمله‌سازی» را فرابگیریم. این امر تحت عنوان «دستور زبان» صورت می‌گیرد. با این حال هر جمله‌ای که از لحاظ دستوری درست باشد، از لحاظ «معنائی» لزوماً درست نیست. پس باید

[۳۱] First Order Logic

قوانینی برای «معناشناسی» جملات و کلمات وضع کنیم و نهایتاً میان «صورت و معنی» این منطق ارتباط برقرار کنیم. در ادامه‌ی درس، دقیقاً همین مسیر را برای معرفی منطق مرتبه‌ی اول پیش گرفته‌ایم.

در منطق مرتبه اول، بسته به ماهیت ریاضی مورد مطالعه نیاز به انتخاب یک **زبان** [۳۲] داریم.

تعریف ۵۷. منظور از یک زبان مرتبه اولِ $\mathcal{L}$ مجموعه ای به صورتِ اجتماع سه مجموعه‌ی مجزای $\mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$ است که در آن مجموعه $\mathcal{F}$ را مجموعه‌ی **نماد های تابعی**، $\mathcal{R}$ را مجموعه **نمادهای رابطه‌ای** و $\mathcal{C}$ را **مجموعه‌ی ثوابت زبان** می‌خوانیم. همچنین برای هر نماد تابعی $f \in \mathcal{F}$ یک عدد طبیعی $n_f \in \mathbb{N}$ به عنوان تعداد مواضع f در نظر گرفته شده است. به طور مشابه برای هر رابطه $R \in \mathcal{R}$ یک عدد n_R را به عنوان تعداد مواضع رابطه R در نظر می گیریم.

دقت کنید که «یک نماد تابعی» با یک «تابع» فرق می‌کند. تابع یک عمل است که از یک مجموعه به مجموعه‌ای دیگر تعریف می‌شود ولی نماد تابعی، صرفاً یک نماد (یا یک اسم) است. در واقع در مرحله‌ی معرفی زبان، هیچ «معنائی» برای علائم در نظر گرفته نشده است.

در زیر مثال هایی از یک زبان مرتبه اول آورده‌ایم. فعلاً درگیر کاربرد این زبانها یا علت انتخاب آنها نمی‌شویم.

۱. مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ یک زبان مرتبه‌ی اول است که در آن هیچ نمادی اعم از تابعی یا رابطه‌ای یا ثابت وجود ندارد.

۲. مجموعه‌ی $\mathcal{L} = \{\in\}$ حاوی یک رابطه‌ی دوموضعیِ $\in$ را زبان «نظریه‌ی مجموعه‌ها» می‌خوانیم.

۳. گرافها را معمولاً در یک زبانِ $\mathcal{L} = \{R\}$ حاوی یک رابطه‌ی دوموضعی مطالعه می‌کنیم.

۴. زبان نظریه‌ی گروهها به صورت $\mathcal{L} = \{+, 0, -\square\}$ است که در آن $+$ یک نماد تابعی دو موضعی است، $-\square$ یک نماد تابعی تک موضعی است و ۰ یک ثابت است.

۵. زبان حلقه‌های یکدار به صورتِ $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ است که در آن ۰, ۱ نمادهای ثابت هستند و $+, *$ نمادهای تابعی دو موضعی هستند. در صورت نیاز به این زبان می‌توان نمادهائی برای توابع وارون ضربی و وارون جمعی نیز افزود.

۶. زبانِ $\mathcal{L} = \{\leq\}$ حاوی یک رابطه‌ی دوموضعی، برای مطالعه‌ی مجموعه‌های مرتب می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

دقت کنید که علائم منطقیِ $\wedge, \vee, \exists$ و نماد تساوی را در زبان قرار نمی‌دهیم. زبان تنها حکم الفبائی دارد که وقتی آنها را با علائم منطقی ترکیب کنیم می‌توانیم کلمه و جمله بسازیم. در مرحله‌ی بعد سراغ «کلمه‌سازی» در یک زبان می‌رویم. معمولاً از واژه‌ی «ترم» به جای کلمه استفاده می‌کنیم.

یک مجموعه $\{v_0, v_1, \ldots\}$ را از **متغیرها** در نظر بگیرید.

تعریف ۵۸. **($\mathcal{L}$ترمها)** فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد. مجموعه $\mathcal{L}$ترمها به صورت استقرایی زیر تعریف می شود:

۱. هر ثابت $c \in \mathcal{C}$ و هر متغییر v یک ترم است.

۲. اگر $t_1, \cdots, t_n$ ترم باشند و f یک نماد تابعی n موضعی باشد، آنگاه $ft_1, \cdots, t_n$ یک ترم است.

برای مثال، در زبان حلقه‌ها عبارتِ $+10$ یک ترم است (که برای راحتی آن را به صورتِ $1 + 0$ نمایش می‌دهیم. همچنین عبارتِ $+\cdot xxx$ یک ترم است که آن را برای سادگی به صورتِ $x^2 + x$ می‌نویسیم.

[۳۲] Language

مثال ۵۹. چند ترم در زبان حلقه ها (ساده‌سازی شده)

۱. $۰ + ۱$،

۲. $۱ + ۱$

۳. $۱ + ۱ + ۱$

۴. $۱ + ۱ + ۱ + \ldots + ۱$

۵. $۰, ۱, x_۱, x_۲, \ldots$

۶. $(۱ + ۱).(x.x.x) + (x.x)$

۷. $۲x^۳ + ۳x^۲$.

دقت کنید که همان گونه که تعریف استقرائی بالا بیان می‌کند **طول ترمها متناهی است.**

تمرین ۶۰. نشان دهید که هر ترم t در زبان حلقه ها **متناظر** با یک چند جمله ای $f(x_۱, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}[X_۱, \ldots]$ است (منظور، یک چند جمله‌ای چند متغیره است با ضرایب در اعداد صحیح). برای مثال $f(X_۱, X_۲) = X_۱X_۲ + ۵ + ۲X_۱^۳X_۲^۴$ متناظر با یک ترم است. (تمرین فوق را با استقراء روی ساخت ترمها و با توجه به قضیه‌ی ۶۴ پاسخ دهید).

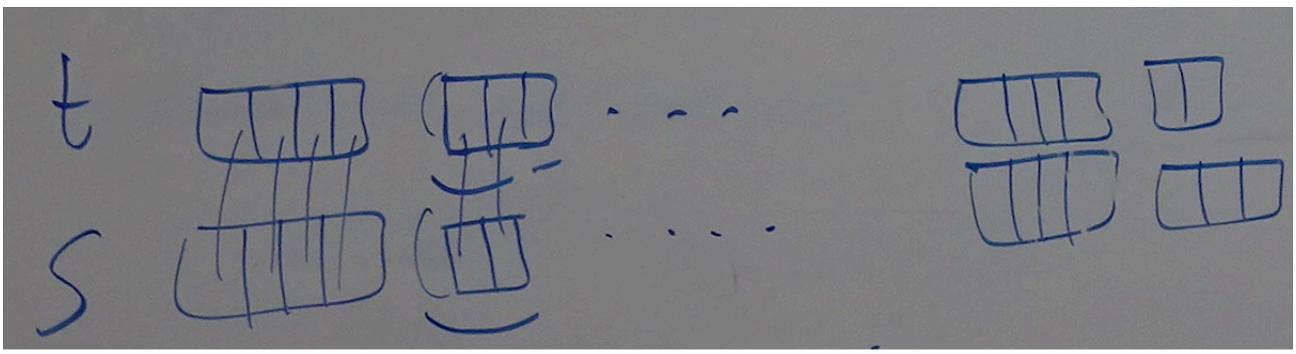
تمرین ۶۱. ترمها را در زبانهای نظریه‌ی گروهها و نظریه‌ی گرافها بررسی کنید.

لم ۶۲. هیچ ترمی یک بخش ابتدایی سره‌ی یک ترم دیگر نیست. (به بیان دیگر، اجتماع دو ترم خود یک ترم نیست.)

تمرین ۶۳. چرا با اینکه $۲x$، در زبان حلقه‌ها، بخش ابتدایی $۲x + ۴x^۲$ است، لم بالا باید درست باشد؟! (به تعریف دقیقِ ترمها توجه کنید).

اثبات لم. اگر ترم t یک ثابت یا یک متغیر باشد آنگاه نه t بخش ابتدایی سره‌ی یک ترم دیگر است و نه ترم دیگری بخش ابتدایی سره‌ی آن است. (برای اثبات همین هم نیاز به استقراء دارید!). فرض کنید که این حکم برای ترمهای $t_۱, \cdots, t_n$ برقرار باشد؛ یعنی نه آنها بخش ابتدائی ترمی باشند و نه ترمی بخش ابتدائی آنها باشد. هدف، اثبات این است که حکم مورد نظر برای $ft_۱, \cdots, t_n$ نیز برقرار است.

اگر $S = s_۱ \cdots s_m$ بخش ابتدایی $ft_۱, \cdots, t_n$ باشد آنگاه بوضوح، S باید به صورت $S = fu_۱ \cdots u_n$ باشد. فرض کنید u_i اولین جایی باشد که $u_i \neq t_i$.



در این صورت یا t_i بخش ابتدایی u_i است یا u_i بخش ابتدایی t_i است که این با فرض استقراء متناقض است. □

قضیه ۶۴. (خوانش یکتای ترمها) هر ترم دقیقاً به یکی از صورتهای زیر است:

۱. ثابت یا متغیر است.

۲. به صورت $ft_1 \cdots t_n$ است که در آن f یک نماد تابعی n موضعی و $t_1 \cdots t_n$ ترم هستند؛

و در مورد دوم تابع f و ترمهای $t_1 \cdots t_n$ به طور **یکتا** مشخص می شوند.

اثبات. بنا به تعریف آنچه از مواردِ ۱و۲ به دست بیاید ترم است. برای اثبات یکتائی نمایش فرض کنید $ft_1 \dots t_n$ یک ترم باشد که نمایش دیگری به صورتِ $gs_1 \dots s_m$ داشته باشد. در این صورت واضح است که $f = g$ و $n = m$. حال اگر i اولین اندیسی باشد که $s_i \neq t_i$ آنگاه یا s_i بخش ابتدائی t_i است و یا برعکس؛ که این بنا به لم قبل ناممکن است. □

پس از آشنائی با ترمها، قدم طبیعی بعدی آشنائی با فرمولها است. به بیان غیر دقیق اگر $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد آنگاه $\mathcal{L}$فرمولها با استفاده از نمادهای به کار رفته در $\mathcal{L}$، متغیرها $(v_1, v_2, \cdots)$، و ادوات منطقی $\neg, \wedge, \exists$ و نمادهای کمکی (،) و نماد تساوی تولید می‌شوند. در زیر تعریف L فرمولها را دقیق (و البته استقرائی) کرده‌ایم.

تعریف ۶۵ (فرمولها)**.** فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. مجموعه $\mathcal{L}$ فرمولها به صورت زیر حاصل می شود.

۱. اگر t_1 و t_2 دو ترم باشند آنگاه $t_1 = t_2$ یک $\mathcal{L}$فرمول است .

۲. اگر $\mathcal{L}$ ،$t_1 \cdots t_n$ چند ترم باشند و $R \in \mathcal{L}$ یک نماد رابطه ای n موضعی باشد آنگاه $Rt_1 \cdots t_n$ یک $\mathcal{L}$فرمول است.

۳. اگر ψ یک $\mathcal{L}$فرمول باشد آنگاه $\neg\psi$ یک $\mathcal{L}$فرمول است.

۴. اگر ψ_1, ψ_2 دو $\mathcal{L}$ فرمول باشند آنگاه $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ نیز یک $\mathcal{L}$فرمول است.

۵. اگر ψ یک $\mathcal{L}$ فرمول باشد آنگاه $\exists x\psi$ یک $\mathcal{L}$ فرمول است.

از آقای امیر نیک‌آبادی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۸.۰ جلسه هشتم، ساختارها و تعبیر ترمها

یادآوری می‌کنم که یک زبان مرتبه‌ی اول مجموعه‌ای متشکل از **نمادهای** تابعی، **نمادهای** رابطه‌ای و **نمادهایی** برای ثوابت است. در جلسه‌ی قبل، برای یک زبان مرتبه‌ی اولِ L، مجموعه‌ی Lترمها و Lفرمولها را تعریف کردیم. همانند ترمها، فرمولهای مرتبه‌ی اول نیز به طور یکتا خوانش می‌شوند (اثبات قضیه‌ی زیر را به عهده‌ی شما می‌گذارم):

قضیه ۶۶ (خوانش یکتای Lفرمول ها)**.** اگر φ یک Lفرمول باشد، از یکی از حالات زیر خارج نیست:

۱. φ به صورت $t_1 = t_2$ است که در آن t_1 و t_2 دو Lترم هستند.

۲. φ به صورت $Rt_1 \cdots t_n$ است که در آن $t_1, \cdots, t_n$ خودْ Lترم هستند.

۳. φ به صورت $\neg\psi$ است که در آن ψ یک Lفرمول است.

۴. φ به صورت $(\psi_۱ \wedge \psi_۲)$ است که در آن $\psi_۱$ و $\psi_۲$ در L فرمول هستند.

۵. φ به صورت $\exists x \quad \psi$ است که در آن ψ یک L فرمول است.

در موارد بالا ترم‌های t_i و فرمول‌های $\psi_۲$ ، $\psi_۱$ و ψ به طور یکتا مشخص می‌شوند.

علاوه بر آنچه در بالا به عنوان فرمول ساخته می‌شود، از کوتاه‌نوشتهای زیر نیز استفاده می‌کنیم.

$$\psi_۱ \vee \psi_۲ = \neg(\neg\psi_۱ \wedge \neg\psi_۲)$$
$$\psi_۱ \to \psi_۲ = (\neg\psi_۱ \vee \psi_۲)$$
$$\forall x \quad \psi = \neg(\exists x \quad \neg\psi)$$
$$\psi_۱ \longleftrightarrow \psi_۲ = (\psi_۱ \to \psi_۲) \wedge (\psi_۲ \to \psi_۱)$$
$$\psi_۱ \wedge \cdots \wedge \psi_n = ((\psi_۱ \wedge \psi_۲) \wedge \psi_۳) \wedge \cdots$$

معمولاً به جای $Rt_۱t_۲$ می نویسیم $R(t_۱, t_۲)$ یا $t_۱Rt_۲$. نیز به جای $\exists x_۱\exists x_۲ \ldots \exists x_n \quad \psi$ می نویسیم $\exists x_۱ \ldots x_n \quad \psi$. هر چند در تعریف فرمول‌ها وضعیت پرانتزها کاملاً مشخص است و فرمول‌ها به طور یکتا خوانش می‌شوند، در مصارف روزمره‌ی ریاضی از پرانتزهای بیشتری برای خوانش آسانتر فرمولها استفاده می‌شود. این پرانتزها طبق اولویت‌های زیر حذف می‌شوند.
اولویت‌های نمادهای منطقی

$$(,)$$
$$\neg \quad \exists \quad \forall$$
$$\wedge \quad \vee$$
$$\to \quad \leftrightarrow$$

در هر کدام از طبقات بالا، ظهور زودتر، به نماد اولیت می‌دهد.

مثال ۶۷. فرمول $\neg\varphi \wedge \psi \to x$ به صورت زیر پرانتزگذاری می‌شود:

$$\big((\neg\varphi) \wedge \psi\big) \to x$$

مثال ۶۸. دو فرمول زیر با هم تفاوت دارند.

$$\textcircled{1}\quad \forall x \quad \varphi \wedge \psi \rightarrow x$$
$$\textcircled{2}\quad \forall x \quad (\varphi \wedge \psi \rightarrow x)$$

فرمول اولی به صورت زیر پرانتزگذاری می‌شود:

$$((\forall x \phi) \wedge \psi) \rightarrow x.$$

برای مرور مبحث پرانتزگذاری، مثال‌های بیشتر را در جزوه‌ی مبانی ریاضی (در تارنمای درسهای من) مطالعه بفرمایید.

تمرین ۶۹. فرمول‌های زیر را پرانتز گذاری کنید.

۱. $\forall x \quad R_1(x,y) \rightarrow \exists y \quad S(y) \vee R_2(x,y)$

۲. $R(x,y) \iff \exists x \quad R(x,y) \wedge \forall y \quad S(x) \vee \forall y \quad R(x,y)$

مثال ۷۰. صورت کلی فرمولهای <u>بدون سور</u> در زبان حلقه‌ها به صورت زیر است (در صورت نرمال فصلی)

$$\big(f_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \wedge f_2(x_1,\ldots,x_n) \neq 0 \wedge \ldots \wedge f_n(x_1,\ldots,x_n) = 0\big) \vee$$
$$\big(g_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \wedge g_2(x_1,\ldots,x_n) \neq 0 \wedge \ldots g_n(x_1,\ldots,x_n) = 0\big) \vee \ldots$$

دقت کنید که چندجمله‌ایهای بالا با ضرایب در اعداد صحیح هستند (در واقع فرمولهای بدون سور در زبان حلقه‌ها، دقیقاً ورایته‌ها (چندگوناها) ی جبری را مشخص می‌کنند.

تمرین ۷۱. فرمول‌های بدون سور را در زبان $L = \{+, 0, 1\}$ پیدا کنید. چند نمونه در زیر آمده است:

$$x + 1 = 0$$

$$x + x + 1 = 0$$

$$nx + my = 0$$

مثال ۷۲. اگر از سورها استفاده کنیم، در زبان بالا جواب داشتن یک دستگاه معادلات خطی را می‌توان با یک فرمول نوشت.

$$\exists x \exists y \quad (mx + ny = 0 \wedge m'x + n'y = 0)$$

۱.۸.۰ معناشناسی در منطق مرتبه‌ی اول

روش معناشناسی در منطق مرتبه‌ی اول، به معناشناسی در زبان طبیعی نزدیک است. برای مثال برای بررسی درستی جمله‌ی «کتاب روی میز است» باید نخست باید یک جسم فیزیکی به نام کتاب و یک جسم فیزیکی به نام میز، و یک رابطه بین آنها

یعنی «واقع شدن یکی بر دیگری» را داشته باشیم. یعنی نه تنها اسامی را تعبیر می‌کنیم بلکه روابط میان آنها را نیز تعبیر می‌کنیم. در واقع در ذهن ما یک تابع «تعبیر» وجود دارد که کلمه‌ی کتاب را به شیء کتاب تصویر می‌کند. معناشناسی منطق مرتبه‌ی اول نیز به صورتی مشابه (البته بسیار دقیقتر) است.

فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. یک L**ساختارِ** $\mathfrak{A}$ از یک مجموعه‌ی A (به نام جهانِ Lساختارِ $\mathfrak{A}$) تشکیل شده است و از موارد زیر:

۱. برای هر نمادِ ثابت $c \in L$ یک عنصرِ مشخصِ $\overset{\mathfrak{A}}{c} \in A$ (که به آن تعبیر ثابت c در ساختارِ $\mathfrak{A}$ می‌گوییم)

۲. برای هر نماد تابعیِ nموضعیِ $f \in L$ یک تابعِ

$$\overset{\mathfrak{A}}{f}\colon A^n \to A$$

(که به آن تعبیر نماد تابعیِ f در ساختارِ $\mathfrak{A}$ گفته می‌شود)، و

۳. برای هر نماد رابطه‌ای nموضعیِ $R \in L$ یک رابطه‌ی $\overset{\mathfrak{A}}{R}$ روی A (که بدان تعبیر رابطه‌ی R در ساختارِ $\mathfrak{A}$ گفته می‌شود).

یک Lساختارِ $\mathfrak{A}$ را معمولاً به همراه توابع، روابط و ثوابت آن به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\mathfrak{A} = (A, \{\overset{\mathfrak{A}}{c}, \overset{\mathfrak{A}}{f}, \overset{\mathfrak{A}}{R}\}) \quad f, c, R \in L$$

دقت کنید که در یک Lساختار، در واقع تمام نمادهای زبان، دارای یک مابِازاء هستند.

مثال ۷۳. $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, ۰)$ یک Lساختار است که در آن

$$L = \{+, ۰\}.$$

مثال ۷۴. $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, ۰, ۱, \leq)$ یک Lساختار است که در آن

$$L = \{+, \cdot, ۰, ۱, <\}$$

مثال ۷۵. اگر $L = \{ \overset{\uparrow}{R} \}$ (دو موضعی) آنگاه هر گراف G یک Lساختار است. در ساختارِ $\mathfrak{G} = (G, \overset{\mathcal{G}}{R})$ رابطه‌ی R را به صورت زیر «تعبیر» می‌کنیم:

$$\overset{\mathcal{G}}{R}(u, v) \iff \text{u به v وصل باشد}$$

حال که با Lساختارها، به عنوان جهان‌هایی که قرار است وقایع در آنها رخ دهند، آشنا شدیم، به تعبیر ترمها و فرمولها در Lساختارها می‌پردازیم.

تعریف ۷۶. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک Lساختار باشد. منظور از **یک نگاشت تعبیر**، تابعی مانند

$$\beta : \{v_۰, v_۱, \ldots\} \to A$$

است. دامنه‌ی این تابع، مجموعه‌ی متغیرهاست و بُردِ آن جهان Lساختارِ $\mathfrak{A}$ است.

در یک ساختار، باید بتوان «معنای عینی کلمات» را پیدا کرد:

تعریف ۷۷ (تعبیر ترمها)**.** فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک Lساختار، β یک تابع تعبیر مانند تعریف بالا و t یک Lترم باشند. **تعبیر ترم** t **در ساختارِ** $\mathfrak{A}$ **با نگاشت تعبیرِ** β که آن را با $\overset{\mathfrak{A}}{t}[\beta]$ نشان می‌دهیم، به صورت استقرائیِ زیر تعریف می‌شود:

۱. اگر $t = v$ یک متغیر باشد، قرار می‌دهیم $\overset{\mathfrak{A}}{t}[\beta] = \beta(v_i)$ (در واقع، متغیرها را خودِ تابع تعبیر، تعبیر کرده است!)

۲. اگر $t = c$ یک ثابت باشد، قرار می‌دهیم: $\overset{\mathfrak{A}}{t}[\beta] = \overset{\mathfrak{A}}{c}$

۳. اگر تعبیر ترم‌های $t_۱, \dots, t_n$ را در Lساختارِ $\mathfrak{A}$ بدانیم آنگاه $f(t_۱, \dots, t_n)$ را به صورت زیر تعبیر می‌کنیم:

$$f^{\mathfrak{A}}(t_۱, \dots, t_n)[\beta] = \overset{\mathfrak{A}}{f}(\overset{\mathfrak{A}}{t_۱}[\beta], \dots, \overset{\mathfrak{A}}{t_n}[\beta])$$

مثال ۷۸. تعبیرِ ترم $v_۰ v_۲ v_۰ + v_۰ v_۱$ با تابع تعبیرِ

$$v_۰ \to ۱$$

$$v_۲ \to ۲$$

$$v_۱ \underset{\beta}{\to} ۴$$

در ساختار $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ به صورت زیر است:

$$(v_۰ v_۲ v_۰ + v_۰ v_۱)^{\mathfrak{R}}[\beta] = ۱ \cdot ۲ \cdot ۱ + ۱ \cdot ۴ = ۶$$

توجه ۷۹. وقتی می‌نویسیم $t(x_۱, \dots, x_n)$ منظورمان دو چیز است:

۱. x_iها متغیرهایی متمایز هستند.

۲. متغیرهای استفاده شده در ترم t از میان $x_۱, \dots, x_n$ هستند؛ به بیان دیگر

$$var(t) \subseteq \{x_۱, \dots, x_n\}$$

که در آن با $var(t)$ مجموعه‌ی متغیرهای به کار رفته در ترم t را نشان داده‌ایم. دقت کنید که شاید همه‌ی متغیرهای بالا در این ترم به کار نرفته باشند.

۹.۰ جلسه نهم، ادامه‌ی معناشناسی

در جلسه‌ی گذشته به معناشناسیِ منطق مرتبه‌ی اول پرداختیم. گفتیم که ترمهای زبان در ساختارها و با استفاده از نگاشتهایی که متغیرها را تعبیر می‌کنند، معنا می‌شوند. نیز گفتیم که هر نگاشت تعبیر، تابعی مانند

$$\beta : \{v_0, v_1, \ldots\} \to A$$

است که دامنه آن مجموعه‌ی متغیرهاست و بردِ آن جهان یک L ساختار $\mathfrak{A}$ است. در این جلسه می‌خواهیم مفهوم «درست بودن یک فرمول» دریک ساختار را تعریف کنیم.

فرض کنید φ یک $\mathcal{L}$ فرمول، $\mathfrak{A}$ یک L ساختار، β و یک نگاشت تعبیرِ متغیرها در A، جهانِ ساختارِ $\mathfrak{A}$، باشد. منظور از عبارت $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ این است که فرمول φ با ارزیابی β از متغیرها در ساختار $\mathfrak{A}$ درست است. در زیر همین تعریف را دقیق کرده‌ایم.

تعریف ۸۰ (درست بودن یک فرمول در یک ساختار). عبارت $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ (که خوانده می‌شود: فرمولِ φ با ارزیابیِ β در ساختارِ $\mathfrak{A}$ درست است) به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱.

$$\mathfrak{A} \models t_1 = t_2[\beta] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$$

یعنی فرمولِ $t_1 = t_2$ وقتی در ساختارِ $\mathfrak{A}$ درست است که تعبیرهای ترمهای t_1, t_2 در این ساختار با هم برابر باشند؛

۲.

$$\mathfrak{A} \models R(t_1, \cdots, t_n)[\beta] \Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \cdots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$$

یعنی فرمولِ $R(t_1, \ldots, t_n)$ وقتی در ساختارِ $\mathfrak{A}$ درست است که تعبیرهای ترمهای t_i در این ساختار با یکدیگر رابطه‌ی $R^{\mathfrak{A}}$ را داشته باشند؛

۳. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta]$ هرگاه $\mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$

۴.

$$\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi_1[\beta] \text{ و } \mathfrak{A} \models \psi_2[\beta]$$

۵. $\mathfrak{A} \models \exists x \psi[\beta]$ هرگاه یک عنصر $a \in A$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$ که در آن $\beta\frac{a}{x}$ یک نگاشت تعبیر متغیرهاست که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta\frac{a}{x}(v) = \begin{cases} \beta(v) & v \neq x \\ a & v = x \end{cases}$$

تعریف بالا را می‌توان برای سایر ادوات کمکی نیز به صورت زیر تعمیم داد: تعریف می‌کنیم $\mathfrak{A} \models (\psi_1 \to \psi_2)[\beta]$ هرگاه اگر $\mathfrak{A} \models \psi_1[\beta]$ آنگاه $\mathfrak{A} \models \psi_2[\beta]$. همچنین تعریف می‌کنیم $\mathfrak{A} \models \forall x \quad \psi[\beta]$ هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$.

در ادامه به تعریف متغیرهای آزاد و پایبند پرداخته‌ایم. می‌گوییم متغیر x در فرمول φ آزاد است هرگاه x تحت تأثیرِ هیچ سوری قرار نگرفته باشد. بیایید این تعریف را به صورت دقیق و استقرائی بیان کنیم.

تعریف ۸۱ (متغیرآزاد). آزاد بودن حضور متغیر x در فرمول φ به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود:

۱. اگر $\varphi = (t_1 = t_2)$ در این صورت x برای φ آزاد است هرگاه $x \in var(t_1)$ یا $x \in var(t_2)$ (یعنی در صورتی که x یکی از متغیرهای به کار رفته در یکی از t_i ها باشد).

۲. اگر $\varphi = Rt_1, \cdots, t_n$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه x جزوِ متغیرهای های یکی از t_i ها باشد.

۳. اگر $\varphi = \neg\psi$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه در ψ آزاد باشد.

۴. اگر $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه x در ψ_1 یا در ψ_2 آزاد باشد.

۵. اگر $\varphi = \exists y\psi$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه $x \neq y$ و x در ψ آزاد باشد.

متغیرهایی را که آزاد نباشند، **پایبند** می‌نامیم.

توجه ۸۲. تعداد متغیر های آزاد یک فرمولِ φ همواره متناهی است.

مثال ۸۳. متغیر های آزاد و پایبند را در فرمولهای زیر مشخص کنید.

$$\forall v_0. \quad \left(\exists v_1 R(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{v_0}}, \overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{v_1}}) \wedge p(\overset{\text{آزاد}}{\overset{\uparrow}{v_1}})\right)$$

$$\forall x, y \quad R_1(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{x}}, \overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{y}}) \wedge R_2(\overset{\text{آزاد}}{\overset{\uparrow}{x}}, \overset{\text{آزاد}}{\overset{\uparrow}{y}})$$

$$\forall x, y \quad \left(p(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{x}}) \wedge q(\overset{\text{پایبند}}{\overset{\uparrow}{y}})\right)$$

توجه ۸۴. برای دیدن مثال‌های بیشتر از متغیر های آزاد و پایبند به جزوه مبانی ریاضی مدرس در تارنمای درسها مراجعه کنید.

لم ۸۵. اگر ارزیابی های $\gamma, \beta : \{v_0, v_1, \ldots\} \to A$ روی متغیرهای آزاد فرمولِ φ یکسان عمل کنند آنگاه

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$$

مثال ۸۶. فرض کنید $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$. ارزیابی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta : v_0 \mapsto 1$$

$$v_1 \mapsto 2$$

$$v_i \mapsto i \quad i \neq ۱, ۲$$

$$y \mapsto ۶$$

$$\gamma : v_۰ \mapsto ۱$$

$$v_۱ \mapsto ۲$$

$$v_i \mapsto ۱۰i \quad i \neq ۱, ۲$$

$$y \mapsto ۱۰۰۰$$

حال فرمولهای $v_۰ + v_۱ = v_۲$ و $\exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (v_۰ + v_۱ = ۲)$ را در نظر بگیرید. واضح است که

$$R \models v_۰ + v_۱ = v_۲[\beta] \Leftrightarrow R \models v_۰ + v_۱ = v_۲[\gamma]$$

$$R \models \exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (v_۰ + v_۱ = ۲)[\beta] \Leftrightarrow R \models \exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (v_۰ + v_۱ = ۲)[\gamma]$$

در مورد دوم دقت کنید که متغیرهای پایبند نقشی بازی نکرده‌اند.

اثبات لم۸۵. حکم را با استقراء روی ساخت فرمولها ثابت می‌کنیم.

- اگر φ به صورت $t_۱ = t_۲$ باشد و β ، γ روی متغیرهای به کار رفته در $t_۱$ و $t_۲$ هم ارزش باشند، آنگاه واضح است (و اگر واضح نیست تحقیق کنید) که
$$t_۱^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_۲^{\mathfrak{A}}[\gamma].$$

- اگر φ به صورت $Rt_۱, \cdots, t_n$ باشد و ارزشهای γ ،β روی متغیرهای به کار رفته در t_i ها یکسان باشند، آنگاه $t_i^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_i^{\mathfrak{A}}[\gamma]$، و در نتیجه $R^{\mathfrak{A}}(t_۱^{\mathfrak{A}}[\beta], \cdots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_۱^{\mathfrak{A}}[\gamma], \cdots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma])$

- بررسی حالتهائی را که $\varphi = \neg\psi$ و $\varphi = \psi_۱ \wedge \psi_۲$ به عنوان تمرین رها می‌کنم.

- اگر φ به صورت $\exists x\psi$ باشد و β و γ روی متغیر های آزاد φ یکسان عمل کنند،آنگاه $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta]$ هرگاه $a \in A$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$. حال مشاهده کنید که ارزیابی های $\gamma\frac{a}{x}$ و $\beta\frac{a}{x}$ روی متغیر های آزاد ψ یکسان عمل می کنند؛ زیرا متغیرهای آزادِ ψ با متغیرهای آزادِ ϕ تنها احتمالاً در x متفاوتند و $\gamma\frac{a}{x}, \beta\frac{a}{x}$ روی همه‌ی متغیرها به غیر از x بنا به فرض یکسان عمل می‌کنند و روی x هم بنا به تعریف هر دو مقدارِ a دارند. پس بنابر فرض استقراء
$$\mathfrak{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\gamma\frac{a}{x}].$$
بنابراین $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x\psi[\gamma]$.

□

دقت کنید که معمولاً در نمایش یک فرمول به صورت $\varphi(x_۱, \ldots, x_n)$ **متغیرهای پایبند آن را نمی‌نویسیم.** به طور کلی:

توجه ۸۷. منظور از نماد $\varphi(x_۱, \cdots, x_n)$ این است که

۱. متغیرهای x_i متمایز هستند.

۲. متغیر های آزاد فرمول φ در میان $\{x_۱, \cdots, x_n\}$ هستند.

مثال ۸۸. در فرمول $\varphi(x,z) = \exists y \quad x+y=۰$، دقت کنید که با این که متغیرِ z در فرمول نیامده است، آن را در پرانتز نوشته‌ایم.

تعریف ۸۹. به فرمولی که متغیر آزاد نداشته باشد، **جمله** می‌گوئیم.

مثال ۹۰. فرمول زیر یک جمله در زبان حلقه‌هاست.

$$\forall a,b,c\, \exists x \quad ax^۲+bx+c=۰$$

بنابر لم قبلی اگر φ یک جمله باشد و β ، γ دو تابع تعبیر برای متغیر ها باشند آنگاه

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].$$

بنابراین اگر φ یک جمله باشد، می‌نویسیم $\mathfrak{A} \models \varphi$ هرگاه برای یک (به بیان معادل به ازای هر) ارزیابی β داشته باشیم $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$.

توجه ۹۱. اگر φ یک جمله و $\mathfrak{A}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد آنگاه $\mathfrak{A} \models \varphi$ یا $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ و هر دو اینها با هم نمی‌تواند رخ دهد (در داخل یک Lساختار تناقضی نمی‌تواند رخ دهد).

تعریف ۹۲. فرض کنید x یک متغیر و s,t دو ترم باشند، منظور از نماد $t\frac{s}{x}$ این است که به جای متغیر x در ترم t، ترمِ s را جایگذاری کنیم.

برای مثال

$$t(y) = ۲y+۳=۰$$

$$s = y^۲+y+x$$

$$t\frac{s}{y} = ۲(y^۲+y+x)+۳=۰$$

از آقای امیر نیک‌آبادی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۱۰.۰ جلسه دهم، لم جایگذاری و شروع نظریه‌ی مدل مقدماتی

یادآوری ۹۳. اگر t یک ترم باشد و $x \in var(t)$ و s یک ترم دیگر باشد، منظور از $t\dfrac{s}{x}$ ترمی است که از جایگذاری ترمِ s به جای متغیرِ x در t ایجاد می‌شود. همچنین اگر φ یک فرمول باشد و x متغیر آزادی در φ باشد، آنگاه فرمول $\varphi\dfrac{s}{x}$ فرمولی است

که با جایگذاری s به جای x در φ ایجاد می‌شود. در زیر تعریف دوم را دقیق‌تر کرده‌ایم.

تعریف ۹۴. فرمول $\varphi\frac{s}{x}$ به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود.

۱. اگر $\varphi = (t_۱ = t_۲)$ آنگاه $\varphi\frac{s}{x} = (t_۱\frac{s}{x} = t_۲\frac{s}{x})$

۲. اگر $\varphi = Rt_۱, \cdots, t_n$ آنگاه $\varphi\frac{s}{x} = Rt_۱\frac{s}{x}, \cdots, t_n\frac{s}{x}$

۳. $\varphi = \psi_۱ \wedge \psi_۲$ یا $\varphi = \neg\psi$، تعریف به عهده‌ی شما.

۴. $\varphi = \exists y\psi$ آنگاه، اگر $x = y$ آنگاه $\varphi\frac{s}{x} = \varphi$؛ و اگر $x \neq y$ آنگاه $\varphi\frac{s}{x} = \exists y\psi\frac{s}{x}$.

در جلسه‌ی قبل مفهوم «آزاد بودن یک متغیر» دریک فرمول را تعریف کردیم. در زیر مفهومِ «آزاد بودن یک متغیر نسبت به یک ترم در یک فرمول» را تعریف کرده‌ایم. به بیان غیر دقیق، می‌گوییم **متغیر** x **نسبت به ترم** s **در فرمول** φ **آزاد است،** هرگاه هیچ حضورِ آزاد x در φ متأثر از هیچ سوری نباشد که متغیری از s را پای‌بند کند. برای مثال در فرمول زیر در زبان حلقه‌ها، متغیر x نسبت به ترم $s = y^۲ + ۲y$ آزاد **نیست**.

$$\exists y \quad y^۲ + ۲y = x$$

اما در فرمولهای زیر x در φ نسبت به s آزاد است:

$$\forall x \quad \exists y \quad y^۲ + ۲y = x$$

$$\exists y \quad (y^۲ + ۲y = ۰) \wedge (x = y)$$

دقت کنید که در فرمولِ اول x کلاً متغیری پایبند است و با ترم s تداخلی ندارد، و در فرمول دوم، سور تنها روی قسمتِ پیش از عطف اثر می‌کند و بنابراین اثر آن با متغیرِ x درگیر نمی‌شود. بیائید تعریف بالا را به صورت استقرائی دقیق کنیم.

تعریف ۹۵. متغیر x در فرمول φ نسبت به ترم s آزاد است، هرگاه

۱. x یک متغیر پای‌بند در φ باشد، یا

۲. متغیر x در φ آزاد باشد و یکی از موارد استقرایی زیر رخ دهد.

- $\varphi = (t_۱ = t_۲)$ و $x \in var(t_۱)$ یا $x \in var(t_۲)$.
- $\varphi = Rt_۱, \cdots, t_۲$ $x \in var(t_i)$ برای یکی از i ها.
- $\varphi = \psi_۱ \wedge \psi_۲$ و x نسبت به s برای $\psi_۱$ آزاد باشد یا x نسبت به s برای $\psi_۲$ آزاد باشد.
- $\varphi = (\neg\psi)$ و x نسبت به s برای ψ آزاد باشد.
- اگر $\varphi = (\exists y\psi)$ آنگاه x نسبت به s در φ آزاد است **هرگاه** x **نسبت به** s **در** ψ **آزاد باشد و متغیرِ** y **در** s **نباشد.** (اولاً دقت کنید که در این حالت داریم $x \neq y$ زیرا فرض کرده‌ایم که x در φ آزاد است).

در ابتدای درس، ترمِ $\varphi\frac{s}{x}$ و فرمولِ $\varphi\frac{s}{x}$ را معرفی کردیم. در زیر روشی برای تعبیر اینگونه ترمها و فرمولها تحت یک نگاشت ارزیابی متغیرها را بیان کرده‌ایم. پیش از آن نیاز به یادآوری زیر داریم:

یادآوری ۹۶. فرض کنید که $\beta : \{v_۰, v_۱, \ldots\} \to A$ یک نگاشت ارزیابی در ساختار $\mathfrak{A}$ باشد و $a \in A$ عنصر دلخواهی باشد. آنگاه نگاشت ارزیابی $\beta\frac{a}{x} : \{v_۰, v_۱, \ldots\} \to A$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta\frac{a}{x}(v) = \begin{cases} \beta(v) & v \neq x \\ a & v = x \end{cases}$$

لم ۹۷ (جایگذاری). فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبانِ مرتبه‌ی اول باشد، s و t دو ترم در این زبان باشند، $\mathfrak{A}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد و

$$\beta : \{v_۰, v_۱, \ldots\} \to A$$

یک نگاشت ارزیابی متغیرها در جهان ساختارِ $\mathfrak{A}$ باشد. آنگاه

۱. $(t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$

۲. $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$ به شرطی که x نسبت به s در φ آزاد باشد.

توجه ۹۸. شرط آزاد بودن x نسبت به s در φ لازم است. (مثال زیر).

مثال ۹۹. فرمول زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi : \forall y \quad y^۲ + y = x$$

اگر $s = y$ آنگاه داریم:

$$\varphi\frac{s}{x} : \forall y \quad y^۲ + y = y$$

حال ارزیابی زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta : y \mapsto ۲, x \mapsto ۳, v_i \mapsto i$$

داریم

$$\varphi[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}] = \forall y \quad y^۲ + y = ۲$$

واضح است که از نظر ساختارِ اعداد حقیقی فرمولهای $\varphi\frac{s}{x}[\beta]$ و $\varphi[\beta\frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$ با هم معادل نیستند.

فُرمالیسم منطقی را تا مدتی رها می‌کنیم و یکی دو جلسه به نظریه‌ی مدل مقدماتی می‌پردازیم. شاید نمادگذاری‌های بالا و دقت بیش از حد در تعاریف شما را خسته کرده باشد، ولی یادتان باشد که قرار است قضیه‌ی مهمی در این درس ثابت کنیم که بر پایه‌ی این فرمالیسم (یعنی صورت‌گرائی) بنا شده است. خوشختبانه در نظریه‌ی مدل، بحثها ملموسترند.

۱.۱۰.۰ نظریه‌ی مدل مقدماتی ۱

یادآوری ۱۰۰. به فرمولی که متغیر آزاد نداشته باشد، جمله می‌گوییم.

در درسهای پیشین با مفهومِ درست بودن یک جمله در یک ساختارِ $\mathfrak{A}$ که آن را با

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$

نشان می‌دهیم، آشنا شدید. اگر $\mathfrak{A} \models \varphi$ آنگاه می‌گوییم **ساختارِ $\mathfrak{A}$ مدلی برای جمله‌ی φ است.**

مثال ۱۰۱. یک زبان $\mathcal{L}$ انتخاب کنید و در آن زبان، یک جمله‌ی φ بنویسید به طوری که برای هر $\mathcal{L}$ ساختار $\mathfrak{M}$ داشته باشیم:
اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ و M متناهی باشد، آنگاه تعداد اعضای M زوج است.

اثبات. زبان مورد نظر را به صورت $\mathcal{L} = \{E\}$ می‌گیریم که در آن E نمادی برای یک رابطه‌ی دو موضعی است. جملات زیر رادر نظر بگیرید:

- $\varphi_1 : \forall x \quad E(x,x)$
- $\varphi_2 : \forall x,y \quad E(x,y) \to E(y,x)$
- $\varphi_3 : \forall x,y,z \quad E(x,y) \wedge E(y,z) \to E(x,z)$
- $\varphi_4 : \forall x,y,z \quad ((x \neq y) \wedge (x \neq z) \to (E(x,y) \wedge E(x,z) \to y = z))$
- $\varphi_5 : \forall x \quad \exists y \quad (x \neq y \wedge E(x,y))$

قرار دهید:

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_5$$

اگر $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشد آنگاه روی M یک رابطه‌ی دوتایی $E^{\mathfrak{M}}$ وجود دارد. اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ آنگاه $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه‌ی هم ارزی است، که هر کلاس آن دقیقاً دو عضو دارد. پس اگر M متناهی باشد، آنگاه $|M|$ (تعدای اعضای M) زوج است.

$\square$

مثال ۱۰۲. در یک زبان مناسب یک جمله‌ی φ بنویسید به طوری که اگر $\mathfrak{M} \models \phi$ آنگاه $\mathfrak{M}$ یک گروه باشد.

پاسخ. زبانِ $\mathcal{L} = \{*, e\}$ را در نظر می‌گیریم که در آن یک تابع دو موضعی است (که آن را برای عمل ضرب گروه لازم داریم) و e یک ثابت است (که آن را برای عضو خنثای گروه نیاز داریم). حال جملات زیر را در نظر بگیرید:

۱. $\varphi_1 : \forall x \quad x * e = e * x = x$
۲. $\varphi_2 : \forall x \quad \exists y \quad x * y = y * x = e$
۳. $\varphi_3 : \forall x,y,z \quad x * (y * z) = (x * y) * z$

حال دقت کنید که اگر $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد و $\mathfrak{M} \models \varphi_۱ \wedge \varphi_۲ \wedge \varphi_۳$ آنگاه $(M, *^{\mathfrak{M}}, e^{\mathfrak{M}})$ یک گروه است که عنصرِ خنثای آن $e^{\mathfrak{M}}$ است. برای مثال، $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q} - \{۰\}, \cdot, ۱) \models \varphi$ یا $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, ۰) \models \varphi$ که در آنها به ترتیب داریم $*^{\mathfrak{Z}} = +$ و $e^{\mathfrak{Z}} = ۰$ و $*^{\mathfrak{Q}} = \cdot$ و $e^{\mathfrak{Q}} = ۱$. $\square$

تعریف ۱۰۳. به یک مجموعه از جملات در زبانِ $\mathcal{L}$ یک $\mathcal{L}$تئوری گفته می‌شود.

مثلاً $T_{group} = \{\varphi_۱, \varphi_۲, \varphi_۳\}$، مطابق نمادهای مثالِ قبل، تئوری گروه‌هاست.

تعریف ۱۰۴. اگر T یک Lتئوری باشد، می‌گوییم $\mathfrak{M} \models T$ (بخوانید $\mathfrak{M}$ مدلی برای تئوریِ T است) هرگاه برای هر $\varphi \in T$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi$.

توجه ۱۰۵. تئوری T می‌تواند نامتناهی جمله داشته باشد.

مثال ۱۰۶. مطابق نمادهای بالا، $\mathfrak{Z} \models T_{group}$ و $\mathfrak{Q} \models T_{group}$.

تمرین ۱۰۷. در یک زبان مناسب $\mathcal{L}$ یک تئوری T بنویسید به طوری که اگر $\mathfrak{M} \models T$ و $\mathfrak{M}$ متناهی باشد، آنگاه اندازه‌ی $\mathfrak{M}$ به صورت $۲^n.۳^m$ باشد برای $m, n \in \mathbb{N}$.

توجه ۱۰۸. زبان نیز می‌تواند نامتناهی باشد.

از سرکار خانم «زهرا شیروانیان» بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۱۱.۰ جلسه یازدهم، ادامه‌ی نظریه‌ی مدل

در جلسات قبل با مفهوم درست بودن یک فرمول در یک ساختار تحت یک ارزیابی مشخص آشنا شدیم. در نظریه‌ی مدل معمولاً نمادها را به صورت زیر ساده‌سازی می‌کنیم.

فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد و $a_۱, \cdots, a_n \in M$ و $\varphi(x_۱, \cdots, x_n)$ یک فرمول با متغیرهای آزاد در میان $x_۱, \cdots, x_n$ باشد. اگر β یک ارزیابی از متغیرها در ساختارِ $\mathfrak{M}$ باشد و $\beta(x_i) = a_i$ آنگاه به جای $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta]$ می‌نویسیم $\mathfrak{M} \models \varphi(a_۱, \cdots, a_n)$. همچنین اگر $t(x_۱, \ldots, x_n)$ یک ترم باشد آنگاه به جای $t^{\mathfrak{M}}[\beta]$ می‌نویسیم $t^{\mathfrak{M}}(a_۱, \cdots, a_n)$.

تمرین ۱۰۹. لم جایگذاری را با نماد های جدید بیان کنید.

در جلسه‌ی قبل با مفهومِ تئوری‌ها آشنا شدیم. در این جلسه چند مثال دیگر از تئوریها را آورده‌ایم.

مثال ۱۱۰. در یک زبان مناسبِ $\mathcal{L}$ یک تئوری T برای مجموعه های نامتناهی بنویسید.(یعنی تئوری T به گونه ای باشد که اگر $\mathfrak{M} \models T$ آنگاه M مجموعه ای نامتناهی باشد؛ به بیانی دیگر، مجموعه‌های متناهی را اصل بندی کنید.)

پاسخ. قرار دهید $\mathcal{L} = \emptyset$؛ یعنی زبانی را در نظر بگیرید که هیچ نماد تابعی یا رابطه‌ای یا ثابت در آن وجود ندارد. در چنین زبانی تنها باید با استفاده از ادوات منطقی و متغیرها جمله ساخت. جمله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi_۲ : \exists x_۱, x_۲ \;\; x_۱ \neq x_۲$$

$$\varphi_۳ : \exists x_۱, x_۲, x_۳ \;\; (x_۱ \neq x_۲) \wedge (x_۱ \neq x_۳) \wedge (x_۲ \neq x_۳)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n : \exists x_۱, \cdots, x_n \;\; \bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j)$$

$$\vdots$$

قرار دهید $T = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. دقت کنید که هر جمله‌ی φ_n بیانگر این است که در جهان مدلِ مورد نظر ما، حداقل n عنصر موجود است. دقت کنید که اگر آنگاه اگر $\mathfrak{M} \models T$ آنگاه M برای هر عدد طبیعیِ n حداقل دارای n عضو است؛ پس M نامتناهی است. □

در مثال بالا، مجموعه‌های نامتناهی را **اصل‌بندی** کردیم؛ یعنی مجموعه‌ای از اصول نوشتیم که هر **مدل** از آنها قطعاً یک مجموعه‌ی نامتناهی است و هر مجموعه‌ی نامتناهی یک مدل از آنهاست. یکی از موضوعات مورد مطالعه در نظریه‌ی مدل، یافتن اصل‌بندی‌های مناسب برای ساختارهای مختلف است.

مثال ۱۱۱. آیا می توان مجموعه‌های متناهی را اصل بندی کرد؛ یعنی آیا می‌توان یک تئوری T نوشت به طوری که $\mathfrak{M} \models T$ اگروتنهااگر M متناهی باشد؟ (روی این سوال فکر کنید ولی پاسخ آن را در درس های آینده خواهیم دید).

تمرین ۱۱۲. قرار دهید $\mathcal{L} = \{E\}$ که در آن E یک نماد رابطه‌ای دوموضعی است. تئوری T را چنان بنویسید که اگر $\mathfrak{M} \models T$ آنگاه

۱. $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه هم ارزی باشد که هر کلاس $E^{\mathfrak{M}}$ دقیقاً دو عضو دارد.

۲. $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ دقیقاً یک کلاس n عضوی دارد.

۳. $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد که هر کلاس آن نامتناهی است.

۴. $E^{\mathfrak{M}}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد که دقیقاً دو کلاس دارد، یکی از این دو کلاس نامتناهی است و دیگری دقیقاً ۵ عضو دارد.

.

۱.۱۱.۰ کامل بودن یک تئوری

از درس جبر یادآوری می‌کنم که منظور از میدان، ساختاری به صورت $(K, +, \cdot, ۰, ۱)$ است که در آن K با عمل جمع و عمل ضرب (وقتی که صفر را کنار بگذاریم) تشکیل گروه آبلی می‌دهد و ضرب نسبت به جمع ویژگی پخش‌پذیری دارد. ساختارهای

زیر میدان هستند: $(\mathbb{C},+,\cdot,۰,۱)$، $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot,\bar{۰},\bar{۱})$، $(\mathbb{R},+,\cdot,۰,۱)$، $(\mathbb{Q},+,\cdot,۰,۱)$. دقت کنید که $\mathbb{Z}_p$ میدان متشکل از اعداد صحیح در پیمانه‌ی p را نشان می‌دهد که یک میدان متناهی است. منظور از یک میدان بسته‌ی جبری، میدانی است مانند میدان اعداد مختلط، که در آن هر معادله‌ی چندجمله‌ای با ضرایب در آن میدان دارای جواب است. (اینکه در میدان اعداد مختلط هر چندجمله‌ای به طور کامل تجزیه‌ی می‌شود و همه‌ی ریشه‌هایش در آن میدان است، **قضیه‌ی اساسی جبر** نام دارد که اثباتش را می‌توانید در درسهای جبر یا توابع مختلط فرابگیرید). دقت کنید که میدان اعداد حقیقی، بسته‌ی جبری نیست زیرا در آن معادله‌ای مانند معادله‌ی $x^۲ + ۱ = ۰$ جواب ندارد.

در زبانِ $\mathcal{L} = \{+,\cdot,۰,۱\}$ تئوری **میدان های بسته جبری** با مشخصه ی ۰ به صورت زیر است:

۱ ــ اصولی که بگوید فضای مورد نظر با عمل جمع یک گروه آبلی می سازد:

$$\forall x,y,z \quad x+(y+z)=(x+y)+z$$

$$\forall x,y \quad x+۰=۰+x=x$$

$$\forall x \exists y \;\; x+y=۰$$

$$\forall x,y \;\; x+y=y+x$$

۲ ــ اصولی که بگوید فضای مورد نظر با عمل ضرب یک گروه آبلی می سازد:

$$\forall x,y,z \quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$$

$$\forall x,y \quad x\cdot y=y\cdot x$$

$$\forall x \quad (x\neq ۰ \to \exists y\; x\cdot y=۱)$$

$$\forall x \quad x\cdot ۱=۱\cdot x=x$$

۳ــ رابطه ی جمع با ضرب:

$$\forall x,y,z \quad x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$

۴ــ مشخصه صفر:

$$۱+۱\neq ۰$$

$$۱+۱+۱\neq ۰$$

$$\vdots$$

$$۱+۱+۱+\cdot+۱\neq ۰$$

$$\vdots$$

۵ــ اینکه صفر و یک دو عنصر متمایز هستند:

$$۱\neq ۰$$

۶ــ بسته جبری بودن:

$$\forall a_۰,a_۱ \;\; \exists x a_۰+a_۱x=۰$$

$$\vdots$$

$$\forall a_۰,\cdots,a_n \;\; \exists x a_۰+a_۱x+\cdot+a_nx=۰$$

$$\vdots$$

تئوری بالا را با ACF نشان می دهیم [۳۳]. همان طور که قضیه‌ی اساسی جبر می‌گوید، $(\mathbb{C}, +, \cdot, ۰, ۱) \models ACF$؛ یعنی ACF یک تئوری است که اعداد مختلط با اعمال جمع و ضرب روی آن، مدلی برای آن است. یک سوال منطقی در این جا این است که تئوریِ ACF تا چه اندازه‌ای در بیان ویژگی‌های اعداد مختلط تواناست. در زیر در این باره بیشتر توضیح داده‌ایم (و درسهای آینده باز هم بیشتر دراین باره خواهیم گفت).

دقت کنید که برای هر Lساختار یک اصل‌بندیِ‌طبیعی وجود دارد:

تعریف ۱۱۳. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشد. تئوریِ کاملِ Lساختارِ $\mathfrak{M}$ به صورت زیر نشان داده و تعریف می‌شود:

$$Th(\mathfrak{M}) = \{\varphi | \mathfrak{M} \models \varphi\}$$

دقت کنید که تئوریِ کامل یک ساختار، حاوی تمامِ جملاتی است که در آن ساختار درستند؛ به بیان دیگر همه‌ی اتفاقاتی که در آن ساختار رخ می‌دهند در این تئوری بیان شده‌اند. بنابراین اکر T تئوری کامل یک $\mathcal{L}$ساختار باشد آنگاه برای هر $\mathcal{L}$ جمله φ یا $\varphi \in T$ یا $\neg\varphi \in T$؛ علت، طبیعی است؛ زیرا برای هر جمله‌ای، یا خودِ آن جمله یا نقیضِ آن در Lساختار مورد نظر درست است.

حال تئوری کامل اعداد مختلط را در نظر بگیرید: $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, ۰, ۱)$. واضح است که $\mathbb{C} \models Th(\mathbb{C})$؛ نیز گفتیم که $\mathbb{C} \models ACF$. یعنی اعداد مختلط، مدلی برای هر دوی این تئوری‌هاست. قضیه‌ای در نظریه‌ی مدل بیان می‌کند که این دو تئوری مدلهای یکسانی دارند (یعنی هر مدلی از هر کدام، مدلی از دیگری است).

قضیه ۱۱۴ (رابینسون)**.** تئوری ACF با تئوریِ کاملِ اعداد مختلط، هم‌ارز است؛ یعنی هر مدلی از تئوری کامل اعداد مختلط، یک مدل از ACF است و هر مدلی از ACF یک مدل از تئوری کامل اعداد مختلط است.

نتیجه‌ی قضیه‌ی بالا این است که هر جمله‌ای که در اعداد مختلط درست باشد، در هر مدل دیگری از ACF نیز درست است و هر جمله‌ای که درباره‌ی اعداد مختلط نادرست باشد، در هر مدل دیگری از ACF نیز نادرست است. به بیان دیگر ACF اعداد مختلط را **به طور کامل** اصل‌بندی می‌کند.

دقت کنید که مجموعه‌ی اصولِ ACF مجموعه‌ی نسبتاً کوچکی است و تعداد اصول آن از تعداد همه‌ی جملات درست در اعداد مختلط بسیار کمتر است. همچنین مجموعه‌ی این اصول را می‌توان توسط یک الگوریتم نوشت. [۳۴]

یک سوال طبیعی این است که کدام بخشهای دیگر ریاضیات دارای اصل‌بندی کامل هستند. ساختارِ اعداد طبیعی، $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $T = Th(\mathfrak{N})$. آیا می توان یک تئوری کامل برای اعداد طبیعی نوشت (یک تئوری که بتوان آن را توسط یک الگوریتم تولید کرد). برای اصل‌بندی اعداد طبیعی تلاشهای زیادی شده است. مهمترین دستگاه اصول برای اعداد طبیعی، اصول پئانوست، که در زیر آنها را آورده‌ایم. اصول پئانو ساختار اعداد طبیعی را در زبانِ $L = \{+, \cdot, ۰, s\}$ اصل‌بندی می‌کند که در آن s یک نماد تابعی برای تابع تالی ($x \mapsto x + ۱$) است.

$$\forall x \;\; s(x) \neq ۰$$
$$\forall x \;\; (x \neq ۰ \to \exists y \;\; x = s(y))$$

[۳۳] algebraically closed fields

[۳۴] چنین الگوریتمی می‌تواند تصمیم بگیرد که چه جمله‌ای درباره‌ی اعداد مختلط درست است و چه جمله‌ای غلط است. در این باره بعداً صحبت خواهیم کرد.

$$\forall x \;\; x + ۰ = x$$
$$\forall x, y \;\; x + s(y) = s(x + y)$$
$$\forall x \;\; x \cdot ۰ = ۰$$
$$\forall x, y \;\; x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

شمای اصول استقرا (برای هر فرمولِ φ)

$$\forall \bar{w} \big(\varphi(\bar{w}, ۰) \wedge \forall x (\varphi(\bar{w}, x) \to \varphi(\bar{w}, s(x))) \to \forall x \;\; \varphi(\bar{w}, x)\big)$$

دقت کنید که مورد آخر، یک عدد اصل نیست؛ بلکه شمائی از اصول است. یعنی برای هر فرمول φ یک اصل بدان صورت در نظر گرفته شده است.

متأسفانه مجموعه‌ای اصول پئانو برای اعداد طبیعی، مجموعه‌ی کاملی نیست. جملاتی پیدا می‌شوند که در اعداد طبیعی درستند ولی در همه‌ی مدلهای دیگر این اصول درست نیستند (برای مثال قضیه‌ی پاریس و هرینگتون) را ببینید.

پروژه ۱۱۵. درباره‌ی قضیه‌ی پاریس و هرینگتون تحقیق کنید.

در درسهای آینده، به درک بهتری از کامل بودن یک تئوری خواهیم رسید.

ایزومرفیسم

نظریه‌ی مدل بستر مناسبی برای مطالعه‌ی شاخه‌های دیگری ریاضی بخصوص جبر است. بسیاری مفاهیم جبری دارای تعمیمی در نظریه‌ی مدل هستند.

یکی از ویژگی‌های مهمِ ACF این است که هر میدان دیگری که اندازه‌ی آن $۲^{\aleph_۰}$ باشد و بسته‌ی جبری باشد، دقیقاً یکی کپی از میدان اعداد مختلط است؛ یعنی تنها یک میدان بسته‌ی جبری با آن اندازه وجود دارد.

تعریف ۱۱۶. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ ساختار باشند. می گوییم $\mathfrak{N}$ با $\mathfrak{M}$ ایزومورف است هرگاه تابع یک‌به‌یک و پوشای $F : M \to N$ موجود باشد که ویژگی های زیر را داشته باشد:

۱. برای هر ثابت $c \in \mathcal{L}$ داشته باشیم $F(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$،

۲. برای هر $a_۱, \cdots, a_n \in M$ و هر $R \in \mathcal{L}$ داشته باشیم $R^{\mathfrak{M}}(a_۱, \cdots, a_n) \iff R^{\mathfrak{N}}(F(a_۱), \cdots, F(a_n))$،

۳. برای هر تابع $f \in \mathcal{L}$ داشته باشیم $f^{\mathfrak{M}}(a_۱, \cdots, a_n) = a_{n+۱} \iff f^{\mathfrak{N}}(F(a_۱), \cdots, F(a_n)) = F(a_{n+۱})$.

لم زیر بیان می‌کند که در دو ساختار ایزومرف، اتفاقهای یکسانی رخ می‌دهد.

لم ۱۱۷. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ ساختار ایزومورف باشند. در این صورت اگر $\varphi(x_۱, \cdots, x_n)$ یک $\mathcal{L}$ فرمول باشد و $a_۱, \cdots, a_n \in M$ آنگاه

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_۱, \cdots, a_n) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(F(a_۱), \cdots, F(a_n))$$

لم بالا را در جلسه‌ی آینده اثبات خواهیم کرد.

از آقای امیر نیک‌آبادی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۱۲.۰ جلسه‌ی دوازدهم، ادامه‌ی نظریه‌ی مدل و شروع مفهوم درستی

از جلسه‌ی قبل یادآوری می‌کنم که دو $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ را ایزومرف می‌خوانیم هرگاه نگاشت یک‌به‌یک و پوشایی مانند $F : M \to N$ موجود باشد که حافظ ساختار است؛ یعنی برای هر ثابت $c \in \mathcal{L}$ داشته باشیم

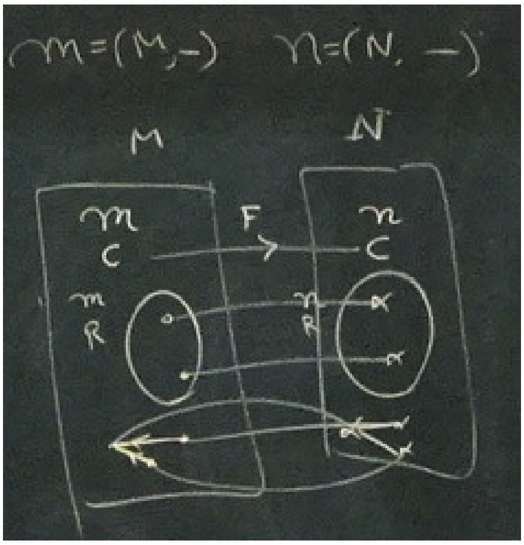
$$F(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$$

و برای هر رابطه‌ی $R \in \mathcal{L}$ داشته باشیم

$$R^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) \iff R^{\mathfrak{N}}\big(F(a_1), \ldots, F(a_n)\big)$$

و نیز برای هرنماد تابعیِ $f \in \mathcal{L}$ داشته باشیم

$$F\Big(f^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)\Big) = f^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \ldots, F(a_n)\Big)$$



لم ۱۱۸. اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ایزومرف باشند، آنگاه برای هر ترمِ $t(x_1, \ldots, x_n)$ و هر چندتائیِ $a_1, \ldots, a_n \in M$ داریم

$$F\Big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)\Big) = t_1^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \ldots, F(a_n)\Big).$$

اثبات. این ادعا را (با توجه به خوانش یکتای ترمها) با استقراء روی ساخت ترمها ثابت می‌کنیم. اگر ترم t یکی از متغیرهای x_i باشد آنگاه $t^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$. پس

$$F\Big(t^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n)\Big) = F(a_i) = t^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \ldots, F(a_n)\Big).$$

اگر ترم t یک ثابت c باشد آنگاه

$$c^{\mathfrak{M}}(a_1, \ldots, a_n) = c^{\mathfrak{M}}$$

و بنا به تعریف ایزومرفیسم

$$F(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big).$$

اگر حکم مورد نظر ما برای ترم‌های $t_1, \dots, t_n$ درست باشد، یعنی اگر بدانیم که

$$F\Big(t_i^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\Big) = t_i^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big),$$

می‌خواهیم آن را برای ترمی به صورتِ $g(t_1, \dots, t_n)$ ثابت کنیم. فرض کنید که

$$t = \overset{\text{یک نماد تابعی در زبان}}{\overset{\uparrow}{g}} \quad (t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_n(x_1, \dots, x_n))$$

یک ترم باشد. طبق تعریفِ تعبیرِ ترمها داریم:

$$t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = g^{\mathfrak{M}}\Big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\Big)$$

F یک ایزومرفیسم است پس

$$F\Big(g^{\mathfrak{M}}\big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\big)\Big) = g^{\mathfrak{N}}\Big(F\big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\big), \dots, F\big(t_n^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n)\big)\Big) =$$

$$g^{\mathfrak{N}}\Bigg(t_1^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big), \dots, t_n^{\mathfrak{N}}\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big)\Bigg) = t^{\mathfrak{N}}\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big).$$

□

لم ۱۱۹. اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ایزومرف باشند آن‌گاه برای هر فرمولِ $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ و برای هر چندتایی $a_1, \dots, a_n$ از عناصر M داریم

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{N} \models \varphi\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big)$$

اثبات. قضیه را با استقراء روی ساخت فرمول φ ثابت می‌کنیم. فرض کنید فرمولِ φ به صورت $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$ باشد. فرض کنید

$$\mathfrak{M} \models t_1(a_1, \dots, a_n) = t_2(a_1, \dots, a_n)$$

در این صورت داریم

$$t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = t_2^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n).$$

می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\mathfrak{N} \models t_1\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big) = t_2\Big(F(a_1), \dots, F(a_n)\Big)$$

یعنی می‌خواهیم نشان دهیم که

$$t_1^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1),\dots,F(a_n)\Big)=t_2^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1),\dots,F(a_n)\Big).$$

از این که

$$t_1^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)=t_2^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n).$$

و اینکه $F:M\to N$ یک تابع است نتیجه می‌گیریم که

$$F\Big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)\Big)=F\Big(t_2^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)\Big)$$

در لم قبلی ثابت کردیم که

$$F\Big(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)\Big)=t_1^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1),\dots,F(a_n)\Big)$$
$$F\Big(t_2^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)\Big)=t_2^{\mathfrak{N}}\Big(F(a_1),\dots,F(a_n)\Big)$$

پس اثبات قضیه در این حالت به پایان می‌رسد.

تکمیل اثبات این قضیه را به کلاس تمرین واگذار می‌کنم. $\square$

تعریف ۱۲۰. فرض کنید $\mathfrak{N}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد. فرض کنید $\mathfrak{M}$ نیز یک $\mathcal{L}$ساختار باشد و $M\subseteq N$. می‌گوییم $\mathfrak{M}$ یک **زیرساختار** از $\mathfrak{N}$ است هرگاه روابط، توابع و ثوابت در M تحدید روابط، توابع و ثوابت $\mathfrak{N}$ باشند؛ یعنی

$$c^{\mathfrak{M}}=c^{\mathfrak{N}}$$

و برای هر $a_1,\dots,a_n\in M$ داشته باشیم

$$R^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)\iff R^{\mathfrak{N}}(a_1,\dots,a_n)$$

به بیان دیگر

$$R^{\mathfrak{M}}=R^{\mathfrak{N}}|_M$$

و برای هر $a_1,\dots,a_n\in M$ داشته باشیم

$$f^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n)=a_{n+1}\iff f^{\mathfrak{N}}(a_1,\dots,a_n)=a_{n+1}$$

به بیان دیگر

$$f^{\mathfrak{M}}=f^{\mathfrak{N}}|_M$$

تمرین ۱۲۱.

۱. فرض کنید $\mathfrak{N}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد و $\{\mathfrak{N}_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرساختارهای $\mathfrak{N}$ باشد. نشان دهید $\bigcap \mathfrak{N}_i$ (خودتان این ساختار را معنی کنید، یعنی جهان آن و تعابیر زبان در آن را معرفی کنید) یک زیرساختار از $\mathfrak{N}$ است.

۲. اگر $S \subseteq N$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد به اشتراک همه‌ی زیرساختارهای $\mathfrak{N}$ که شامل S هستند، **زیرساختار تولید شده توسط** S گفته می‌شود و آن را با $\langle S\rangle_{\mathfrak{N}}$ نشان می‌دهند. نشان دهید که جهانِ $\langle S\rangle_{\mathfrak{N}}$ به صورت زیر است

$$\langle S\rangle_{\mathfrak{N}} = \{t^{\mathfrak{N}}(a_1,\dots,a_n) | a_1,\dots,a_n \in S \text{ و } \mathcal{L}\text{ترم است } \text{ یک } t\}$$

مثال ۱۲۲. فرض کنید که G یک گروه باشد و $a,b \in G$. آنگاه گروه تولید شده توسط عنصر a به صورت زیر است:

$$\langle a\rangle_G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$$

و گروه تولید شده توسط عناصرِ a,b به صورت زیر است:

$$\langle a,b\rangle_G = \{a^n b^m | m,n \in \mathbb{Z}\}$$

مثال ۱۲۳. اگر K یک فضای برداری باشد و $a,b \in K$ آنگاه فضای برداری تولید شده توسط a به صورت زیر است:

$$\langle a\rangle_K = \{na | n \in \mathbb{Z}\}$$

فضای برداری تولید شده توسط a,b به صورت زیر است:

$$\langle a,b\rangle_K = \{ma+nb | m,n,\in \mathbb{Z}\}$$

به نظر شما یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی را در چه زبانی می‌توان اصلبندی کرد؟

تمرین ۱۲۴. از لمِ ۱۱۹ نتیجه می‌شود که اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو Lساختارِ ایزومرف باشند، آنگاه برای هر جمله‌ی ϕ در زبانِ L داریم

$$\mathfrak{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi.$$

نشان دهید که عکسِ این گفته برای L ساختارهای متناهی درست است. یعنی اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو Lساختار با جهانهای متناهی باشند و بدانیم که برای هر Lجمله‌ی ϕ داریم

$$\mathfrak{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi.$$

آنگاه $\mathfrak{M}$ با $\mathfrak{N}$ ایزومرف است.

تمرین ۱۲۵. فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشد. به نگاشتِ یک به یک و پوشای $F: M \to M$ یک اتومرفیسم می‌گوییم هرگاه یک ایزومرفیسم میان $\mathfrak{M}$ و خودش باشد. فرض کنید که $\mathfrak{M}$ یک Lساختار با جهانی متناهی باشد. نشان دهید که تعداد

Lساختارهای ایزومرف با $\mathfrak{M}$ که دارای جهانِ M هستند برابر است با

$$\frac{M\text{تعداد جایگشتهای}}{\mathfrak{M}\text{ تعداد اتومرفیسمهای}}$$

تمرین ۱۲۶.

- یک جمله‌ی ϕ در زبان $L = \{\leq\}$ مثال بزنید که $(\mathbb{Q}, \leq) \models \phi$ ولی $(\mathbb{N}, \leq) \not\models \phi$.
- یک جمله‌ی ϕ در زبانِ $L = \{+, \cdot\}$ مثال بزنید که $(\mathbb{R}, +, .) \not\models \phi$ اما $(\mathbb{C}, +, .) \models \phi$. آیا این دو ساختار می‌توانند با هم ایزومرف باشند؟

تمرین ۱۲۷.

- یک فرمول در زبانِ $L = \{+, \cdot, ۰, ۱\}$ مثال بزنید به طوری که در ساختارِ $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, ۰, ۱)$، برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ داشته باشیم
$$\mathfrak{R} \models \phi(a, b) \Leftrightarrow a \leq b.$$
- در تمرین بالا، ساختارِ $\mathfrak{R}$ را با $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, ۰, ۱)$ جایگزین کنید (این تمرین آسان نیست و صورتِ یک قضیه است، با این حال خوب است که روی آن کمی کار کنید.)

تمرین ۱۲۸.

- فرمولی به نام ϕ در زبانِ $L = \{+, \cdot\}$ بنویسید، به طوری که در ساختارِ $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ برای هر $a, b \in \mathbb{N}$ داشته باشیم
$$\mathfrak{N} \models \phi(a, b) \Leftrightarrow b = a + ۱$$
- با همان شرطهای بالا، فرمولی بنویسید، به طوری که
$$\mathfrak{N} \models \phi(a, b) \Leftrightarrow a < b.$$

تمرین ۱۲۹. در زبانِ $L = \{f\}$ که در آن f نمادی برای یک تابع دو موضعی است، فرمولی مانند ϕ بنویسید که (در صورت پذیرش اصل انتخاب) برای هر Lساختارِ $\mathfrak{M}$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \phi$ اگروتنهااگر M نامتناهی باشد.

۱.۱۲.۰ درستی

در درسهای گذشته با مفهوم درست بودن یک فرمول در یک ساختار تحت یک ارزیابی از متغیرها آشنا شدیم. درست بودن یک فرمول در یک ساختار، به ارزیابی متغیرهای آن بستگی داشت. وقتی فرمولِ ϕ در ساختارِ $\mathfrak{M}$ با ارزیابیِ β درست بود، می‌نوشتیم: $\mathfrak{M} \models \phi[\beta]$. نیز نمادها را بعداً ساده‌تر کردیم و گفتیم که از آنجا که درستی فرمول تنها به متغیرهای آزاد آن بستگی دارد، اگر $\phi(x_۱, \ldots, x_n)$ یک فرمول باشد و بدانیم که $\beta(x_i) = a_i$ آنگاه به جای $\mathfrak{M} \models \phi[\beta]$ می‌نویسیم $\mathfrak{M} \models \phi(a_۱, \ldots, a_n)$.

نیز گفتیم که اگر ϕ هیچ متغیر آزادی نداشته باشد، آنگاه درستی آن به نگاشتهای ارزیابی (یا به جایگذاری متغیرها با مقادیر) بستگی ندارد.

فرمولِ $x = x$ را در (در یک زبانِ دلخواهِ L) نظر بگیرید. این فرمول، در هر L ساختاری و با هر ارزیابی‌ای که برای متغیرِ آن داشته باشیم، درست است. چنین فرمولی را همواره درست می‌خوانیم.

تعریف ۱۳۰. $\mathcal{L}$فرمول φ را **همواره‌درست** می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ و به ازای هر تابعِ تعبیرِ $\beta : \{v_0, \dots\} \to M$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\beta]$$

تعریف بالا را با نمادهای ساده‌سازی شده می‌توان بدین صورت بیان کرد: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ همواره درست است هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ و هر چندتایی $a_1, \dots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

به بیان دیگر فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ همواره درست است هرگاه جمله‌ی $\forall x_1, \dots, x_n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n)$ همواره درست باشد؛ یعنی در هر Lساختارِ $\mathfrak{M}$ داشته باشیم:

$$\mathfrak{M} \models \forall x_1, \dots, x_n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

برای این که درک بهتری نسبت به فرمولهای همواره درست داشته باشید مثال پیش رو را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنم که جمله‌ی زیر همواره درست است:

در هر جامعه‌ی انسانی یک نفر هست که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند.

برای بررسی درست بودن این فرمول، باید درست بودن آن را در هر جامعه‌ی دلخواهی بررسی کنیم. فرض کنید M یک جامعه‌ی انسانی دلخواه باشد. در آنجا از دو حالت خارج نیست: یا همه کلاه دارند، یا حداقل یک نفر هست که کلاه ندارد. اگر همه کلاه داشته باشند، جمله‌ی بالا در آن جامعه درست است. اگر یک نفر (مثلا به نام علی) کلاه نداشته باشد باز هم جمله‌ی بالا درست است. چون، به انتقای مقدم، اگر علی کلاه می‌داشت همه کلاه می‌داشتند!

بیایید جمله‌ی بالا را در یک زبان مناسب فرمولبندی کنیم. قرار دهید

$$L = \{\overset{\overset{\text{Hat}}{\uparrow}}{H}(x)\}$$

نماد محمولیِ تک موضعیِ $H(x)$ قرار است به این معنی باشد که x کلاه دارد. جمله‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\exists x \quad (H(x) \to \forall y \quad H(y)).$$

دقت کنید که جمله‌ی بالا در هر ساختاری و با هر «برداشتی» که از H داشته باشیم درست است. فرض کنید جهان ما، مجموعه‌ی گوسفندان یک گله باشند و $H(x)$ بیانگر این باشد که گوسفندی علامت‌گذاری شده است. در آن صورت، معنای جمله‌ی بالا

در گله‌ی گوسفند ما این است که یک گوسفند پیدا می‌شود که اگر او علامت‌گذاری شده باشد، همه‌ی گوسفندان علامت‌گذاری شده‌اند.

دقت کنید که جمله‌ی مورد نظر ما، در جهان مختلف می‌تواند «معانی» متفاوت داشته باشد ولی در همه‌ی آنها درست است! یکی از علل انتخاب روش صورتگرائی برای ریاضیات همین است. وقتی من در ریاضی قضیه‌ای درباره‌ی مجموعه‌ها به شما می‌گویم، نمی‌دانم در ذهن شما چه تصوری از مجموعه وجود دارد؛ ولی روشهای استدلال به گونه‌ای طراحی شده‌اند که اگر من چیزی درباره‌ی مجموعه‌ها «اثبات» کنم، آن جمله با تصور ذهنی هر کسی درست در می‌آید؛ فارغ از این که افراد، تجسم‌های متفاوتی از یک حقیقت می‌توانند داشته باشند.

در لم زیر بررسی کرده‌ایم که برای تعریف همواره درست بودن یک فرمول، داشتن یک زبان که حداقل علائم را داشته باشد، کافی است.

لم ۱۳۱. فرض کنید $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ دو زبان باشند. اگر $\mathcal{L}$فرمولِ φ همواره درست [۳۵] باشد آنگاه φ به عنوان یک $\mathcal{K}$فرمول هم همواره درست است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{L}$فرمولِ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ در هر $\mathcal{L}$ساختار درست باشد.

هدف. اثبات اینکه $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ در هر $\mathcal{K}$ساختار نیز درست است. فرض کنید $\mathfrak{N}$ یک $\mathcal{K}$ساختار باشد. فرض کنید $\mathfrak{M}$ ساختاری باشد که از تحدید $\mathfrak{N}$ به زبان $\mathcal{L}$ به دست می‌آید. (مثال. $(\mathbb{N}, +)$ تحدیدی از $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ است.) آنگاه

$$\mathfrak{M} \models \forall x_1, \ldots, x_n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

از آنجا که $M = N$ داریم

$$\mathfrak{N} \models \forall x_1, \ldots, x_n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

□

از آنجا که همواره درست بودن به زبان بستگی چندانی ندارد، در نمادگذاری زیر زبان را نگنجانده‌ایم:

نمادگذاری ۱۳۲. اگر $\mathcal{L}$فرمولِ φ همواره درست باشد، می‌نویسیم

$$\models \varphi.$$

تمرین ۱۳۳ (اردشیر). نشان دهید اگر برای هر $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{M} \models \psi$$

آنگاه

$$\models \varphi \Rightarrow \models \psi$$

[۳۵] logically valid

نشان دهید که عکس این گفته درست نیست؛ یعنی از $\psi \models \Rightarrow \varphi \models$ نتیجه نمی‌شود که برای هر ساختارِ $\mathfrak{M}$ اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ آنگاه $\mathfrak{M} \models \psi$. به بیان دیگر از $\psi \models \Rightarrow \varphi \models$ نتیجه نمی‌توان گرفت که $\models (\varphi \to \psi)$.

برخی از فرمولهای همواره درست، از تاتولوژیهای منطق گزاره‌ها ناشی می‌شوند.

تعریف ۱۳۴. فرمول φ را **تاتولوژی** می‌نامیم هرگاه فرمول φ به صورت $f(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ باشد که $f(p_1, \ldots, p_n)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها باشد و $\psi_1, \ldots, \psi_n$ فرمولهای مرتبه‌ی اول باشند.

برای مثال

$$\text{(۱)} \quad \varphi \wedge (\varphi \to \psi) \to \psi$$

یک تاتولوژی در منطق مرتبه‌ی اول است که از تاتولوژی زیر در منطق گزاره‌ها به دست آمده است.

$$\big(p \wedge (p \to q) \to q\big)$$

همچنین فرمول زیر یک تاتولوژی درمنطق مرتبه‌ی اول است.

$$\text{(۲)} \quad \varphi \vee \neg\varphi.$$

۱۳.۰ جلسه سیزدهم ادامه‌ی درستی و شروع نظریه‌ی اثبات

از جلسه‌ی قبل یادآوری می‌کنم که $\mathcal{L}$فرمول φ را همواره‌درست می خوانیم هرگاه به ازای هر $\mathcal{L}$ساختار $\mathfrak{M}$ و برای هر نگاشت ارزیابی $\beta : var \to M$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta]$. به بیان دیگر فرمول $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ همواره درست است هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ساختار $\mathfrak{M}$ و برای هر چندتایی $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. نیز به بیان دیگر فرمول $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ همواره درست است هرگاه جمله‌ی $\forall x_1, \ldots, x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ در هر $\mathcal{L}$ساختاری درست باشد.

تعریف ۱۳۵ (تاتولوژی)**.** $\mathcal{L}$فرمول φ را یک **تاتولوژی** می‌نامیم هرگاه به صورت $f(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ باشد که در آن $f(p_1, \ldots, p_n)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها است و $\psi_1, \ldots, \psi_n$ همگی، $\mathcal{L}$فرمول هستند.

مثال ۱۳۶. فرمول‌هایی به صورت $\varphi \vee (\neg\varphi)$ یا $\psi \to (\psi \to \varphi) \wedge (\psi \to \neg\varphi)$ تاتولوژی هستند (ϕ, ψ می‌توانند هر فرمول مرتبه‌ی اولی باشند).

لم ۱۳۷. تاتولوژی ها همواره درست هستند.

اثبات. فرض کنید $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ یک تاتولوژی و $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشند. فرض کنید $a_1, \ldots, a_n \in M$. هدفمان اثبات این است که

$$\mathfrak{M} \models f(\varphi_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \varphi_n(a_1, \ldots, a_n)).$$

فرمول $f(p_1, \ldots, p_n)$ در منطق گزاره‌ها یک تاتولوژی است؛ ارزیابی زیر را برای گزاره های اتمی به کار رفته در آن در نظر بگیرید.

$$v(p_i) = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi_i(a_1, \ldots, a_n)$$

از آنجا که فرمول $f(p_1, \ldots, p_n)$ تاتولوژی (در منطق گزارها) است داریم ۱ $= v(f(p_1, \ldots, p_n))$؛ و این دقیقاً یعنی فرمول $f(\phi_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \phi_n(a_1, \ldots, a_n))$ در $\mathfrak{M}$ درست است. $\square$

نمادگذاری ۱۳۸. می‌نویسیم $\models \varphi$، هرگاه فرمول φ همواره درست باشد. در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که زبانْ نقشی در نمادگذاری بالا بازی نمی‌کند (یعنی کافی است فرمول مورد نظر را در زبانی در نظر بگیریم که حداقل علائم لازم برای نوشتن آن فرمول را داشته باشد).

گفتیم که تاتولوژی‌ها مصداقی از فرمولهای همواره درست هستند. در زیر با چند روش دیگر برای رسیدن به فرمولهای همواره درست آشنا می‌شویم.

لم ۱۳۹ (اصول تساوی)**.** جمله‌های زیر در هر زبانی همواره درستند.

$$\forall x \quad x \doteq x$$

$$\forall x, y \quad x \doteq y \to y \doteq x$$

$$\forall x, y, z \quad x \doteq y \wedge y \doteq z \to x \doteq z$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n \quad \forall y_1, \ldots, y_n \, (x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n \to R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$$

(برای هر رابطه $R \in \mathcal{L}$ و هر تعداد موضع n)

$$\forall x_1, \ldots, x_n \, \forall y_1, \ldots, y_n \, (x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$$

(برای هر نماد تابعی $f \in \mathcal{L}$ و هر تعداد موضع f)

لم ۱۴۰ (لم سور وجودی)**.** فرض کنید φ یک $\mathcal{L}$فرمول و t یک ترم باشند. آنگاه، به شرط این که متغیرِ x نسبت به ترمِ t در فرمولِ φ آزاد باشد، فرمول زیر همواره درست است.

$$\varphi\frac{t}{x} \to \exists x \varphi$$

توجه ۱۴۱. شرط آزاد بودن x نسبت به t در فرمول φ برای لم بالا لازم است. برای مثال اگر

$$\varphi(x) = \forall y \quad y = x$$

و $t = y$ آنگاه

$$\varphi\frac{y}{x}: \quad \forall y \quad y = y$$

و

$$\exists x \varphi: \quad \exists x \forall y \quad y = x$$

واضح است که فرمول دوم از فرمول اول نتیجه نمی‌شود.

تمرین ۱۴۲. چند مثال دیگر برای عدم درستی لم بالا در صورت آزاد نبودن x نسبت به t بسازید.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار و β یک تابع تعبیر متغیرها در M باشند. هدفمان اثباتِ این است که

$$\mathfrak{M} \models (\varphi\frac{t}{x} \to \forall x\varphi)[\beta]$$

طبق تعریفِ درستی یک فرمول در یک ساختار، برای اثبات عبارت بالا کافی است نشان دهیم که اگر $\mathfrak{M} \models \varphi\frac{t}{x}[\beta]$ آنگاه $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi[\beta]$. بنابر آنچه در جلسات قبل ثابت کرده ایم می‌دانیم که از $\mathfrak{M} \models \varphi\frac{t}{x}[\beta]$ نتیجه می‌شود که $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta\frac{t^{\mathfrak{M}}[\beta]}{x}]$. (توجه کنید که این قضیه در صورتی درست بود که x نسبت به t در φ آزاد باشد.) واضح است که از $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta\frac{t^{\mathfrak{M}}[\beta]}{x}]$ نتیجه می شود که $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi$. (زیرا $a = t^{\mathfrak{M}}[\beta]$ عنصری در M است که فرمول مورد نظر را برای ما برآورده می‌کند). □

لم ۱۴۳ (قیاس استثنائی)**.** اگر فرمولهای φ و $\varphi \to \psi$ **هردو همواره درست باشند** آنگاه ψ همواره درست است.

اثبات. فرض کنید $\phi, \phi \to \psi$ فرمولهایی همواره درست باشند. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار و β یک تابع تعبیر متغیرها باشند. هدفمان اثبات این است که $\mathfrak{M} \models \psi[\beta]$.

از آنجا که φ و $\varphi \to \psi$ همواره درست هستند داریم $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta], \mathfrak{M} \models \varphi \to \psi[\beta]$ پس $\mathfrak{M} \models \psi[\beta]$. □

لم ۱۴۴. (معرفی سور وجودی) اگر فرمول $\varphi \to \psi$ همواره درست باشد و x **جزو متغیرهای آزادِ** ψ **نباشد،** آنگاه فرمول زیر همواره درست است:

$$\exists x\varphi \to \psi$$

لم بالا شاید کمی عجیب به نظر برسد: اگر از درست بودن فرمولِ ϕ با متغیر آزادِ x درست بودن فرمولِ ψ نتیجه شود، آنگاه از درست بودن فرمولِ ϕ تنها در یک مصداق، درستی فرمولِ ψ نتیجه می‌شود (البته اگر فرمولِ ψ متغیرِ x را به صورت آزاد نداشته باشد). جمله‌ی زیر را برای فهم بهتر لم بالا در نظر بگیرید: در کلاس شما x غیبت می کند؛ مینا کلاه دارد. فرض کنید این گزاره همواره درست باشد: اگر x غیبت کند ← مینا کلاه دارد. **اگر فرمول بالا همواره درست باشد،** پس x هر کس که باشد، فرمول بالا درست است؛ یعنی این فرمول با هر ارزیابی‌ای از متغیرها درست است. بنابراین وجود یک نفر که غیبت کند، برای کلاه داشتن مینا کافی است.

تمرین ۱۴۵. چند مثال ریاضی برای درستی لم بالا ارائه دهید.

توجه ۱۴۶. در لم بالا شرط آزاد نبودنِ x در ψ لازم است. برای مثال از همواره درست بودن فرمول

$$x < ۱ + ۱ \to x < ۱ + ۱ + ۱$$

در زبان حلقه‌های مرتب، همواره درست بودن فرمولِ

$$(\exists x \quad x < ۲) \to x < ۳$$

نتیجه نمی‌شود.

اثبات لم معرفی سور وجودی. فرض: فرمول $\psi \to \varphi$ همواره درست است و $x \notin Fv(\psi)$. حکم: اگر $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار و β یک تابع ارزیابی متغیرهاباشند؛ اثبات این که $\mathfrak{M} \models (\exists x\varphi \to \psi)[\beta]$. فرض کنید $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi[\beta]$. طبق تعریفِ درستی فرمولها در ساختارها، برای یک عنصر مشخص $a \in M$ داریم $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta\frac{a}{x}]$. می‌دانیم که فرمول $\psi \to \varphi$ همواره درست است؛ پس $\mathfrak{M} \models (\varphi \to \psi)[\beta\frac{a}{x}]$. بنابراین از $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta\frac{a}{x}]$ نتیجه می‌شود که $\mathfrak{M} \models \psi[\beta]$. $\square$

تمرین ۱۴۷. بررسی کنید کدام یک از فرمولهای زیر همواره درست است و کدام همواره درست نیست (همواره درست بودن را در مدلها بررسی کنید و برای همواره درست نبودن مثال بیاورید).

۱. $\exists xA \wedge \exists xB \to \exists x \quad A \wedge B$

۲. $\exists x \quad A \wedge B \to \exists xA \wedge \exists xB$

۳. $\exists xA \wedge \exists xB \to \exists x(A \wedge B)$ در صورتی که $x \notin Fv(B)$

۴. $\forall xA \wedge \forall xB \to \forall x(A \wedge B)$

۵. $\forall x(A \wedge B) \to \forall xA \wedge \forall xB$

۶. $\forall x(A \wedge B) \to \forall xA \wedge \forall xB$ در صورتی که $x \notin Fv(B)$

تمرین ۱۴۸. نشان دهید که هر فرمول مرتبه اول φ معادلی در **صورت نرمال پیشوندی** دارد. یعنی اگر φ یک فرمول باشد فرمول ψ به صورت زیر پیدا می شود به طوری که $\psi \leftrightarrow \varphi$ همواره درست است.

$$\psi : Q_1Q_2 \dots Q_n\chi$$

که در آن

$$Q_i \in \{\forall x, \exists x\}$$

و فرمول χ بدون سور است.

۱.۱۳.۰ نظریه‌ی اثبات

در این جلسه و جلسه‌ی قبل، عبارت $\models \varphi$ را تعریف کردیم. این عبارت یعنی «فرمول φ در همه‌ی ساختارها درست است». بررسی درستی فرمولها، جزو مبحث معناشناسی (و به طور خاص جزو نظریه‌ی مدل) است. در ادامه‌ی درس عبارتِ $\vdash \varphi$ را تعریف خواهیم کرد که قرار است بیانگر این باشد که فرمولِ φ «اثبات‌پذیر» است. دقت کنید که برای اثبات یک فرمول، نیاز به بررسی آن در مدلهای مختلف نخواهیم داشت، بلکه کافی است با روشهای استانداری برای استدلال، به آن فرمول برسیم. از همه مهمتر برای ما، اثبات قضیه‌ی تمامیت خواهد بود که می‌گوید $\vdash \varphi$ و $\models \varphi$ با هم معادلند؛ یعنی یک فرمول داده شده، درست است اگروتنهااگر قابل اثبات باشد. در واقع قضیه‌ی تمامیت قرار است ارتباط بین نظریه‌ی مدل و نظریه‌ی اثبات را بیان کند. اثباتْ یک دنباله از فرمولها بدون در نظر گرفتن معنی است، که به فرمول خاصی ختم می‌شود. بنا به قضیه‌ی درستی و تمامیت، فرمولی که از یک اثبات به دست بیاید در همه‌ی مدلها رخ می‌دهد، و اگر فرمولی در همه‌ی مدلها رخ دهد باید برایش اثبات پیدا شود.

اثبات‌پذیری را نخست در دستگاه استنتاجیِ هیلبرت معرفی خواهیم کرد و سپس در درسهای آینده به دستگاه استنتاج طبیعی (گنتزن) نیز خواهیم پرداخت.

تعریف ۱۴۹. می گوییم فرمول φ در زبان $\mathcal{L}$ اثبات‌پذیر است و می نویسیم $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ هرگاه فرمول φ **در دستگاه هیلبرت قابل اثبات باشد.** یعنی یکی از اتفاقات زیر رخ دهد:

۱. φ یک تاتولوژی باشد.

۲. φ یکی از اصول تساوی باشد.

۳. φ یک مصداق از لم سور وجودی باشد یعنی $\varphi : (\psi\frac{t}{x} \to \exists x\psi)$

۴. φ با استفاده از قیاس استثنائی از از دو فرمولِ قبلاًثابت‌شده‌ی $\psi \to \varphi$ و ψ نتیجه شود؛ به بیان دیگر یعنی

$$\frac{\vdash \psi \quad \vdash \psi \to \varphi}{\vdash \varphi}(MP)$$

۵. φ توسط لم معرفی سور وجودی از فرمولِ قبلاًثابت‌شده‌ی $\psi \to \chi$ نتیجه شود. یعنی فرمولِ ϕ به صورتِ $\exists\psi \to \chi$ باشد که به صورت زیر به دست آمده است:

$$\frac{\vdash \psi \to \chi \ \ , x \notin Fv(\chi)}{\vdash \exists x\psi \to \chi}$$

درواقع وقتی می‌نویسیم $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ یعنی یک دنباله $\psi_1 \dots \psi_n$ موجود است، به طوری که $\psi_n = \varphi$ و ψ_i ها توسط قوانین ۱ تا ۵ ایجاد شده‌اند.

از آقای «امیر نیک‌آبادی» بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم. علت تأخیرم در بارگذاری جزوه‌ی این جلسه، سفر به تهران برای حضور در یک دوره‌ی کوتاه بود.

۱۴.۰ جلسه‌ی چهاردهم، اثبات‌پذیری و بیان قضیه‌ی تمامیت

یادآوری ۱۵۰. در جلسات قبل مفهوم درستی را تعریف کردیم. می‌نویسیم $\models \varphi$ (بخوانید φ همواره درست است) هرگاه φ در تمام $\mathcal{L}$ساختارها درست باشد؛ یعنی هرگاه

$$\forall \mathfrak{M} \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{M} \quad \mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

نیز درباره‌ی موارد زیر صحبت کردیم.

۱. تاتولوژی‌ها همواره درستند؛ برای مثال اگر

$$(p \vee \neg p)$$

یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها و ϕ یک فرمول مرتبه‌ی اول باشند، آنگاه فرمولِ

$$\varphi \vee \neg\varphi$$

همواره درست است.

۲. (لم سور وجودی)

$$\models (\varphi\frac{t}{x} \to \exists x \quad \varphi)$$

(در صورتی که x نسبت به t در φ آزاد باشد.)

۳. (لم معرفی سور وجودی) اگر $\models \varphi \to \psi$ و $x \notin FV(\psi)$ آنگاه $\models \exists x \quad \varphi \to \psi$.

$$\frac{\models \varphi \to \psi}{\models \exists x \quad \varphi \to \psi} x \notin F \vee (\psi)$$

۴. فرمولهای مربوط به رابطه‌ی تساوی

۵. قیاس استثنائی.

مثال ۱۵۱. نشان دهید که فرمول زیر همواره درست نیست.

$$\exists x A \wedge \exists x B \to \exists x \quad (A \wedge B)$$

اثبات. فرض کنید $\mathcal{L} = \{A, B\}$ و B, A دو محمول تک موضعی باشند. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختار به صورت زیر باشد.

$$\mathfrak{M} \text{ جهان } = M = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

$$A \text{ تعبیر رابطه‌ی } : A^{\mathfrak{M}} = \{۱, ۲\}$$

$$B \text{ تعبیر رابطه‌ی } : B^{\mathfrak{M}} = \{۳, ۴\}$$

داریم: $\mathfrak{M} \models \exists x \quad A$ و $\mathfrak{M} \models \exists x \quad B$ ولی $\mathfrak{M} \not\models \exists x \quad (A \wedge B)$. □

توجه ۱۵۲. اگر $x \notin FV(B)$ آنگاه

$$\models \exists x \quad A \wedge \exists x \quad B \iff \exists x \quad (A \wedge B)$$

پس از تعریفِ $\models \varphi$ به تعریفِ $\vdash \varphi$ پرداختیم که آن را نیز در زیر یادآوری کرده‌ایم. دقت کنید که برای رخ دادنِ $\models \phi$ باید در تک‌تک Lساختار ها فرمولِ ϕ درست باشد.

تعریف ۱۵۳. می‌گوییم فرمول φ اثبات‌پذیر است و می‌نویسیم $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ هرگاه یکی از اتفاقات زیر رخ دهد:

۱. φ یکی از اصول تساوی باشد.

۲. φ یک تاتولوژی باشد.

۳. φ یک مصداق از لم سور وجودی باشد؛ به بیان دیگر φ به صورت زیر باشد:

$$\psi \quad \exists x \rightarrow \psi\frac{t}{x}(x$$ نسبت به t در ψ آزاد باشد.)

۴. φ با استفاده از قیاس استثنائی [۳۶] از دو فرمولِ قبلاًثابت‌شده‌ی ψ و $\psi \rightarrow \varphi$: χ به دست آمده باشد. یعنی

$$\frac{\vdash \psi \quad \vdash (\psi \rightarrow \varphi)}{\vdash \varphi}$$

۵. φ با استفاده از لم معرفی سور وجودی از یک فرمول قبلاًثابت‌شده به دست آمده باشد؛ یعنی ϕ به صورت $\exists x \quad \psi \rightarrow \chi$ باشد و $\psi \rightarrow \chi$ قبلاً ثابت شده باشد و x در χ آزاد نباشد.

$$\frac{\vdash \psi \rightarrow \chi}{\vdash \exists x \quad \psi \rightarrow \chi} x \notin F \vee (\chi)$$

تعریف ۱۵۴ (بیان دقیق اثبات‌پذیری). می‌گوییم فرمول φ اثبات‌پذیر است هرگاه یک دنباله‌ی متناهیِ $\psi_1\psi_2 \ldots \psi_n$ از جملات وجود داشته باشد به طوری که $\psi_n = \varphi$ و ψ_iها مطابق قواعدِ ۱ تا ۵ ایجاد شده‌اند.

در واقع دنباله‌ی $\psi_1, \ldots, \psi_n$ یک اثبات برای فرمولِ ϕ نامیده می‌شود. دقت کنید که قواعد اثبات، متناهی هستند و طول یک اثبات نیز همواره متناهی است. وقتی یک اثبات برای یک فرمول می‌نویسیم، نیازی به توجه به معانی نداریم. در واقع اثبات یک فرایند کاملاً ماشینی است که با دانستن قواعد بالا پیش می‌رود.

توجه ۱۵۵. مجموعه‌ی اصول بالا را **دستگاه استنتاجی هیلبرت** می‌نامیم.

احتمالاً در تجربه‌ی ریاضیاتی خود به این برخورده‌اید که گاهی برای اثبات یک حکم، وارد جهانی می‌شویم که حکمْ درباره‌ی آن صادر شده است و درستی حکم آن را در آن جهان بررسی می‌کنیم. برای مثال، اگر به ما بگویند که اثبات کنید که در هر گروهی وارون هر عنصر یکتاست، ابتدا وارد یک گروه می‌شویم و در آن گروه به بررسی درستی این حکم می‌پردازیم. در این حالت،در واقع $\models \phi$ را ثابت کرده‌ایم. اما همین حکم را می‌توان بدون در نظر گرفتن هیچ گروه خاصی و تنها با استفاده از اصول نظریه‌ی گروهها ثابت کرد. در این صورت بدون این که وارد گروه خاصی بشویم تعدادی متناهی نتیجه‌گیری ما را به حکم می‌رساند. در اینجا از $\vdash$ استفاده کرده‌ایم. یکی از مهمترین ویژگی‌های منطق مرتبه‌ی اول آن است که در آن «درستی» و «اثبات‌پذیری» با هم معادلند. اثبات این گفته، هدف درس جلسات آینده‌ی ما خواهد بود. به بیان دیگر در جلسات آینده ثابت خواهیم کرد که

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi$$

[۳۶] MP(Modus ponens)

عبارت بالا قضیه‌ی درستی و تمامیت گودل [۳۷] نام دارد. دقت کنید اثبات چپ به راست عبارت بالا آسان است؛ زیرا اصولی که از آنها در اثبات استفاده می‌کنیم همه «همواره درست» هستند و در هر مرحله‌ای فرمولی همواره درست ایجاد می‌کنند.

اما مشکلْ اثباتِ راست به چپ است، که **قضیه‌ی تمامیت** نام دارد. برای این کار باید نشان بدهیم که اگر جمله‌ای درست باشد، قطعاً برای آن اثباتی وجود دارد.

در واقع می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $\models \varphi$ آنگاه $\vdash \varphi$. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که اگر $\nvdash \varphi$ آنگاه $\nvDash \varphi$. از آنجا که قرار است حکم بالا را برای تمام فرمولها ثابت کنیم، کافی است به جای عبارت بالا ثابت می‌کنیم که $\nvdash \neg\varphi$ آنگاه $\nvDash \neg\varphi$. به بیان دیگر باید ثابت کنیم که اگر $\nvdash \neg\varphi$ آنگاه یک $\mathcal{L}$ساختار $\mathfrak{M}$ موجود است به طوری که $\mathfrak{M} \models \varphi$.

خلاصه ۱۵۶ (خلاصه‌ی بحث). برای اثبات قضیه‌ی تمامیت کافی است نشان دهیم که اگر $\nvdash \neg\varphi$ آنگاه φ مدل دارد؛یعنی φ حداقل در یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ درست است؛ به بیان دیگر:

$$\nvdash \neg\varphi \Rightarrow \exists \mathfrak{M} \quad \mathfrak{M} \models \varphi$$

تعریف ۱۵۷. می‌گوییم فرمولِ φ سازگار است (یا متناقض نیست) هرگاه **نقیضِ** آن اثبات نشود؛ به بیان دیگر هرگاه

$$\nvdash \neg\varphi.$$

برای اثبات قضیه‌ی تمامیت کافی است عبارت زیر اثبات شود:
هر فرمول سازگار دارای مدل است. به بیان دیگر:

$$\exists \mathfrak{M} \quad \mathfrak{M} \models \varphi \quad \Leftarrow \quad \nvdash \neg\varphi$$

توجه ۱۵۸. کافی است قضیه‌ی تمامیت برای جمله‌ها ثابت شود.

نیز قرار است به جای این که ثابت کنیم هر جمله‌ی سازگار دارای مدل است، حکمی کلی‌تر ثابت می‌کنیم. برای آن حکم نیاز به تعریف زیر داریم:

تعریف ۱۵۹. فرض کنید $\sum$ مجموعه‌ای (متناهی یا نامتناهی) از جملات در یک زبان مرتبه‌ی اولِ $\mathcal{L}$ باشد. می‌گوییم $\sum$ متناهیاً سازگار است هرگاه برای هر تعداد متناهی جمله‌ی $\varphi_۱, \ldots, \varphi_n \in \sum$ داشته باشیم

$$\nvdash \neg(\varphi_۱ \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$$

(به بیان دیگر هیچ تعداد متناهی از جملات موجود در $\sum$ با هم تناقض ندهند.)

در ادامه‌ی درس حالت کلی‌تر قضیه‌ی تمامیت را به صورت زیر اثبات خواهیم کرد:

قضیه ۱۶۰. اگر $\sum$ یک مجموعه‌ی متناهیاً سازگار از جملات در یک زبان مرتبه‌ی اولِ $\mathcal{L}$ باشد آنگاه $\sum$ دارای مدل است (یعنی $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ چنان موجود است که برای هر $\varphi \in \sum$ داریم $\mathfrak{M} \models \varphi$.)

[۳۷] Gödel

برای اثبات تمامیت کافی است $\sum = \{\varphi\}$ را در نظر بگیریم.

تمرین ۱۶۱. فرض کنید که φ یک $\mathcal{L}$جمله باشد.

آ) نشان دهید که در هر $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ داریم اگر $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ آنگاه $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$.

ب) نشان دهید که از $\not\models \varphi$ نتیجه نمی‌شود که $\models \neg\varphi$. (بنابراین اگر قضیه‌ی درستی تمامیت ثابت شود، آنگاه از $\not\vdash \varphi$ نتیجه **نمی‌شود** که $\vdash \neg\varphi$؛ یعنی اگر φ اثبات‌پذیر نباشد، دلیلی وجود ندارد برای این که $\neg\varphi$ اثبات‌پذیر باشد).

۱۵.۰ جلسه‌ی پانزدهم، افزودن چند اصل به دستگاه استنتاجی هیلبرت

یادآوری ۱۶۲. با مفهومِ $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ در جلسه‌ی قبل آشنا شدیم و گفتیم که هدف ما در ادامه‌ی درس اثبات قضیه‌ی درستی و تمامیت است:

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi$$

نیز دیدیم که قضیه‌ی تمامیت از قضیه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۱۶۳. اگر $\sum$ یک مجموعه از جملات مرتبه‌ی اول باشد و برای هر $\varphi_۱ \dots \varphi_n \in \sum$ داشته باشیم

$$\not\vdash \neg(\varphi_۱ \wedge \dots \wedge \varphi_n)$$

آنگاه یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ موجود است به طوری که برای هر $\varphi \in \sum$ داریم

$$\mathfrak{M} \models \varphi.$$

دستگاه هیلبرت را در جلسه‌ی قبل به صورتی کاملاً مینیمال معرفی کردیم. به این دستگاه می‌توان اصول دیگری نیز افزود که البته‌ی همه‌ی آنها از همین اصولی که ما بیان کرده‌ایم نتیجه می‌شوند. در این جلسه چند لم دیگر بدین دستگاه می‌افزائیم (و همه‌ی آنها را با استفاده از اصول دستگاه هیلبرت ثابت خواهیم کرد).

لم ۱۶۴. اگر $\varphi_۱, \dots, \varphi_n$ اثبات‌پذیر باشند (یعنی اگر $\vdash \varphi_۱, \vdash \varphi_۲, \dots, \vdash \varphi_n$) و $\varphi_۱ \wedge \varphi_۲ \wedge \dots \wedge \varphi_n \to \psi$ یک تاتولوژی باشد آنگاه $\vdash \psi$.

اثبات. حکم را برای $\varphi_۱, \varphi_۲$، یعنی برای $n = ۲$ ثابت می‌کنیم. می‌دانیم که عبارت زیر یک تاتولوژی است:

$$(\varphi_۱ \wedge \varphi_۲ \to \psi) \to (\varphi_۱ \to (\varphi_۲ \to \psi))$$

که از تاتولوژی زیر در منطق گزاره‌ها ناشی می‌شود.

$$(p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$$

در زیر ثابت می‌کنیم که $\vdash \psi$. یعنی اثباتی برای فرمولِ ψ در دستگاه هیلبرت ارائه می‌دهیم.

۱. $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \psi$ (بنا به فرض لم)

۲. $\big((\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \psi) \to (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi))\big)$ (تاتولوژی)

۳. $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi)$ بنا به موارد ۱ و ۲ و با استفاده از قیاس استثنائی.

۴. ϕ_1 بنا به فرض لم

۵. $\phi_2 \to \psi$ بنا به موارد ۳ و۴ و با قیاس استثنائی.

۶. ϕ_2 بنا به فرض لم.

۷. ψ بنا به ۵و ۶ و با قیاس استثنائی.

توجه ۱۶۵. برای اثبات لم در حالت کلی از تاتولوژی

$$\Big(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi\Big) \to \Big(\varphi_1 \to \big(\varphi_2 \to (\varphi_3 \to \ldots (\varphi_n \to \psi))\big)\Big)$$

استفاده کنید.

□

یادآوری ۱۶۶. در دستگاه هیلبرت لمِ سورِ وجودی به صورت زیر است:

$$\vdash \varphi\frac{t}{x} \to \exists x \quad \varphi$$ (در صورتی که x نسبت به t در φآزاد باشد)

در زیر با استفاده از عکس نقیضِ لم سور وجودی، لم سور عمومی را بیان کرده‌ایم.

لم ۱۶۷ (سورِ عمومی).

$$\vdash \forall x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}$$ (در صورتی که x نسبت به t در φآزاد باشد)

لم بالا در صورت آزاد نبودن x نسبت به t در φ درست نیست. برای مثال قرار دهید:

$$\varphi : (\exists y \quad y^2 = x)$$

دقت کنید که در اینجا x نسبت به y در φ آزاد نیست. (گرفته‌ایم $t = y$). فرمول زیر قابل اثبات نیست (شما فعلاً حداقل این را چک کنید که این فرمول درست نیست):

$$\forall x \quad (\exists y \quad y^2 = x) \to (\exists y \quad y^2 = y)$$

اثباتِ لم سور عمومی. می‌دانیم که عبارت زیر اثبات پذیر است:

$$\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi \quad ۱$$

همچنین عبارت زیر یک تاتولوژی است:

$$(\varphi\frac{t}{x} \to \exists x \quad \varphi) \leftrightarrow (\neg(\exists x \quad \varphi) \to \neg\varphi\frac{t}{x}) \quad ۲$$

که از تاتولوژی زیر در منطق گزاره‌ها به دست می‌آید:

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که

$$(\neg\exists x\varphi) \to \neg\varphi\frac{t}{x} \quad ۳$$

پس بنا به تعاریف:

$$\vdash \forall x\neg\varphi \to \neg\varphi\frac{t}{x} \quad ۴ \qquad (\spadesuit)$$

از آنجایی که $(\spadesuit)$ برای تمامی فرمول های φ درست است، برای $\neg\varphi$ نیز درست است. یعنی ثابت کرده‌ایم که

$$\vdash \forall x\neg(\neg\varphi) \to \neg(\neg\varphi\frac{t}{x})$$

پس ثابت کرده‌ایم که

$$\vdash \forall x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}.$$

$\square$

یادآوری ۱۶۸. اصل موضوعه‌ی معرفی سور وجودی در دستگاه هیلبرت به صورت زیر است:

$$\frac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \exists x\varphi \to \psi} x \notin FV(\psi)$$

در زیر می‌خواهیم لم معرفی سور عمومی را بیان کنیم.

لم ۱۶۹ (معرفی سور عمومی)**.**

$$\frac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \varphi \to \forall x\psi} x \notin FV(\varphi)$$

اثبات. برای اینکه به اثبات

$$\varphi \to \forall x\psi$$

برسیم، کافی است اثبات کنیم که

$$\vdash \neg\forall x\psi \to \neg\varphi$$

یعنی باید اثبات کنیم که

$$\exists x\neg\psi \to \neg\varphi.$$

می‌دانیم که عبارت زیر ثابت شده است:

$$\varphi \to \psi$$

پس بنا به تاتولوژی‌ها عبارت زیر ثابت شده است:

$$\neg\psi \to \neg\varphi \qquad (\spadesuit)$$

بنابه $(\spadesuit)$ و لم سور وجودی داریم

$$\vdash \exists x\neg\psi \to \neg\varphi$$

و این همان است که می خواستیم. $\square$

تمرین ۱۷۰.

- ثابت کنید که اگر $\vdash \phi$ آنگاه $\vdash \forall x\phi$.
- ثابت کنید که اگر $\vdash \phi$ آنگاه $\vdash \phi\frac{t}{x}$.
- نشان دهید که

$$\nvdash (\phi \to \phi\frac{t}{x})$$

برای اثبات دومی از قضیه‌ی درستی و تمامیت استفاده کنید (با این که آن را هنوز ثابت نکرده‌ایم!)

- مشابه آنچه برای درستی گفتیم، اگر از $\vdash \phi$ نتیجه شود $\vdash \psi$ آنگاه عبارت زیر لزوماً برقرار **نیست**:

$$\vdash (\phi \to \psi)$$

مثال ۱۷۱. در دستگاه هیلبرت ثابت کنید که

$$\vdash \exists x\forall y \ Rxy \to \forall y\exists x \ Rxy$$

پاسخ.

$$(۱)\ \forall y \ Rxy \to Rxy$$

(بنا به قاعده $\forall y\varphi \to \varphi\frac{t}{y}$ و با قرار دادنِ $(t = y)$)

$$\text{۲}\ Rxy \to \exists x Rxy$$

(بنا به قاعده‌ی $\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi$ و با در نظر گرفتنِ $t = x$)

$$\text{۳}\ \forall y\ \ Rxy \to \exists x\ \ Rxy$$

(بنا به ۱، ۲ و با استفاده از قیاس استثنائی)

یادآوری ۱۷۲ (معرفی سور عمومی).

$$\frac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \varphi \to \forall x\psi} x \notin FV(\varphi)$$

$$\text{۴}\ \forall y\ \ Rxy \to \forall y \exists x\ \ Rxy$$

(بنابر ۳ و لم معرفی سور وجودی و با توجه به این که $y \notin Fv(\forall y Rxy)$)

یادآوری ۱۷۳ (لم معرفی سور وجودی).

$$\frac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \exists x\varphi \to \psi} x \notin FV(\psi)$$

$$\text{۵}\ \exists x \forall y\ \ Rxy \to \forall y \exists x\ \ Rxy$$

(بنابه ۴ و لم معرفی سور وجودی و با توجه به این که $x \notin Fv(\forall y \exists x Rxy)$) □

تمرین ۱۷۴. آیا می‌توانید تمرین بالا را به گونه‌ای دیگر اثبات کنید؟

تمرین ۱۷۵. در دستگاه هیلبرت استنتاج کنید.

$$\vdash \forall x(A \vee B) \to \forall x A \vee \forall x B \quad x \notin FV(B)$$

$$\vdash \exists x A \wedge \exists x B \to \exists x(A \wedge B) \quad x \notin FV(B)$$

لم ۱۷۶. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول باشد و C یک مجموعه از ثوابت جدید باشد به طوری که $C \cap \mathcal{L} = \emptyset$. فرض کنید $\vdash_{\mathcal{L} \cup C} \varphi(c_1, \dots, c_n)$ آنگاه $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi(x_1, \dots, x_n)$

اثبات. فرض کنید $\psi_1, \dots, \psi_n$ اثباتی برای $\varphi(c_1, \dots, c_n)$ در زبان $\mathcal{L} \cup C$ باشد. در تمام فرمول ها به جای $c_1, \dots, c_n$ متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ را بگذارید. □

دقت کنید که در لم بالا، این شرط که ثوابتْ قبلاً در زبان L نبوده باشند لازم است. (اگر اندکی جبر بلدید!) برای تشابه،

می‌توانید به این فکر کنید که اگر t یک عنصر متعالی روی میدان اعداد گویا باشد آنگاه

$$Q(t) \cong Q(x).$$

از آقای امیر نیک‌آبادی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۱۶.۰ جلسه‌ی شانزدهم، تئوریهای هنکینی

قرارمان بر اثبات قضیه‌ی زیر بود:

قضیه ۱۷۷. فرض کنید T یک تئوری متناهیاً سازگار باشد، آنگاه T دارای مدل است.

قضیه‌ی بالا یکی از قضایای اساسی ریاضیات است که اثبات آن توسط یک ریاضیدان بزرگ به نام گودل صورت گرفته است. سعی من بر این است که وقت کافی روی اثبات این قضیه بگذارم، لکن این از سختی اثبات نخواهد کاست.

دقت کنید که «متناهیاً سازگار بودن» یک تئوری را با استفاده از دستگاه هیلبرت تعریف کرده‌ایم. پس برای اثبات حکم قضیه، یعنی برای یافتن مدل برای تئوری مورد نظر قضیه، **تنها از اصول دستگاه هیلبرت استفاده خواهیم کرد.**

یادآوری می‌کنم که اگر φ یک جمله باشد و T یک تئوری، آنگاه می‌نویسیم $T \vdash \varphi$ هرگاه جملات $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ موجود باشند به طوری که

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \varphi.$$

متناهیاً سازگار بودن، معادل با **متناقض نبودن** است. هر چند ما از این نماد چندان استفاده‌ای نخواهیم کرد، ولی عموماً می‌گویند T تناقض می‌دهد و می‌نویسند $T \vdash \perp$ هرگاه جمله‌ای مانند ϕ نه لزوماً در T موجود باشد به طوری که $T \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

تمرین ۱۷۸. (با استفاده از اصول دستگاه هیلبرت) نشان دهید که T متناهیاً سازگار است اگر و تنها اگر $T \nvdash \perp$.

تعریف ۱۷۹. می‌گوییم تئوری T در زبانِ $\mathcal{L} \cup C$ یک تئوری هنکینی [۳۸] (یا یک تئوری دارای شاهد) است هرگاه برای هر فرمولِ [۳۹] φ در $\mathcal{L} \cup C$ ثابت c_φ موجود باشد به طوری که

$$T \vdash \exists x \varphi \to \varphi(c_\varphi)$$

پس در یک تئوری هنکینی، زبان آنقدر غنی هست که بتواند برای تمام فرمولهای وجودی شاهدی بیاورد. در لم زیر نشان داده‌ایم که هر تئوریِ متناهیاً سازگار را می‌توان در یک تئوریِ متناهیاً سازگارِ هنکینی نشاند:

لم ۱۸۰. فرض کنید T یک تئوری متناهیاً سازگار باشد. آنگاه یک تئوری $T \subseteq T'$ موجود است به طوری که

۱. T' هنکینی است.

۲. T' متناهیاً سازگار است.

---

[۳۸] Henkin theory

[۳۹] دقت کنید که نه L فرمول

اثبات. نخست عبارت زیر را ثابت می‌کنیم:
فرض کنید $\phi(x)$ یک Lفرمول با متغیرِ آزادِ x باشد و $c \notin L$، آنگاه تئوریِ $T \cup \{\exists x\phi(x) \to \phi(c)\}$ نیز متناهیاً سازگار است.
عبارت بالا را به برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید $T \cup \{\exists x\phi(x) \to \phi(c)\}$ سازگار نباشد. آنگاه جملاتِ $\psi_1, \ldots \psi_n \in T$ چنان یافت می‌شوند که

$$\vdash \neg\big((\psi_1 \wedge \ldots \psi_n) \wedge \exists x\phi(x) \to \phi(c)\big) \quad (*)$$

ثابت می‌کنیم که عبارت $(*)$ منجر به

$$\vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$$

می‌شود که این با متناهیاً سازگار بودنِ T متناقض است.

۱. $\neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \vee \neg(\exists x\phi(x) \to \phi(c))$ (بنا به $(*)$ و بنا به تاتولوژیِ $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

۲. $\neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \vee \neg(\neg\exists x\phi(x) \vee \phi(c))$ بنا به ۱ و با توجه به تاتولوژیِ $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$.

۳. $\neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \vee (\exists x\phi(x) \wedge \neg\phi(c))$ بنا به ۲ و با توجه به تاتولوژیِ $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

۴. $\big(\neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n) \vee \exists x\phi(x)\big) \wedge \big(\neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n) \vee \neg\phi(c)\big)$ بنا به مورد ۳ و با استفاده از تاتولوژیِ $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

۵. $(\neg\exists x\phi(x) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)) \wedge (\phi(c) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$. بنا به ۴ و با توجه به تاتولوژیِ $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$.

۶. $(\neg\exists x\phi(x) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n))$ بنا به مورد قبل و تاتولوژیِ $p \wedge q \to p$.

۷. $(\phi(c) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$ بنا به مورد ۵ و تاتولوژیِ $p \wedge q \to q$.
حال دقت کنید که بنا به لمی از جلسه‌ی قبل اگر $\vdash_{L\cup c} \chi(c)$ آنگاه $\vdash_L \chi(x)$.

۸. $\phi(x) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$ بنا به مورد ۷ و نکته‌ی بالا.

۹. $\exists x\phi(x) \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$ بنا به مورد ۸ و لم معرفی سور وجودی.

۱۰. $\neg(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$ بنا به مورد ۹ و مورد ۶ و تاتولوژیِ زیر

$$((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$$

بحث بالا را می‌توان (به آسانی) به صورتی که در تمرین زیر بیان شده است، تعمیم داد:

تمرین ۱۸۱. اگر تئوری T متناهیاً سازگار باشد و $C = \{c_\varphi | \phi \text{ یک } L \text{ فرمول}\}$ مجموعه‌ای از ثوابت جدید باشد، آنگاه

$$T' = T \cup \{\exists x\varphi \to \varphi(c_\varphi) | c_\varphi \in C\}$$

متناهیاً سازگار است.

به ادامه‌ی اثباتِ لم مورد نظر می‌پردازیم. می‌خواستیم ثابت کنیم که اگر T متناهیاً سازگار باشد آنگاه یک تئوریِ متناهیاً سازگار و هنکینی $T \subseteq T'$ یافت می‌شود. قرار دهید

$$T_۱ = T \cup \{\exists x\varphi \to \varphi(c_\varphi) | \phi \text{ یک } L\text{فرمول}\}$$

$$C_۱ = \{c_\varphi | \phi \text{ یک } L\text{فرمول}\}$$

در تمرین قبل نشان دادیم که $T_۱$ نسبت به Lفرمولها هنکینی است. قرار دهید

$$T_۲ = T_۱ \cup \{\exists x\varphi \to \varphi(c_\varphi) | \varphi \text{ یک } L \cup C_۱ \text{ فرمول}\}$$

مشابه تمرین، تئوری $T_۲$ نیز متناهیاً سازگار است و نسبت به $L \cup C_۱$ فرمولها، هنکینی است. به همین ترتیب با استقراء تئوری‌های T_n را برای $n \in \mathbb{N}$ بسازید به طوری که

$$T_۱ \subseteq T_۲ \subseteq \dots$$

هر T_i متناهیاً سازگار است و نسبت به $L \cup C_۱ \cup \dots C_{i-۱}$ فرمولها، هنکینی است. قرار دهید

$$T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$$

T یک تئوری هنکینیِ متناهیاً سازگار در زبانِ $L \cup \bigcup C_i$ است. (جزئیات را بررسی کنید). □

در اینجا اولین قدم مهم برای اثبات قضیه‌ی تمامیت برداشته شد. خلاصه می‌کنیم که هر تئوریِ متناهیاً سازگار، زیرمجموعه‌ی یک تئوریِ متناهیاً سازگارِ هنکینی است. یک قدم مهم دیگر تا اثبات این قضیه باقی مانده است.

تعریف ۱۸۲. تئوری T را در زبانِ L **کامل** می‌خوانیم هرگاه برای هر Lفرمولِ φ داشته باشیم $\varphi \in T$ یا $\neg\varphi \in T$.

در ادامه نشان داده‌ایم که هر تئوریِ متناهیاًسازگار در یک تئوریِ متناهیاًسازگارِ کامل می‌نشیند.

لم ۱۸۳. برای هر تئوری متناهیاً سازگار T یک تئوری $T \subseteq T'$ پیدا می‌شود به طوری که

۱. T' متناهیاً سازگار است.

۲. T' کامل است.

اثبات. فعلاً قضیه را با شرط شمارا بودن زبان ثابت می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $\{\varphi_۱, \varphi_۲, \dots\}$ شمارشی از فرمولها باشد. اگر T یک تئوری متناهیاً سازگار باشد، نشان می‌دهیم که برای هر $\mathcal{L}$فرمولِ φ یا $T \cup \{\varphi\}$ متناهیاً سازگار است یا $T \cup \{\neg\varphi\}$ (و البته این «یا» مانع جمع است، زیرا در غیر این صورت تئوری مورد نظر متناهیاً ناسازگار می‌شود). به بیان دیگر نشان می‌دهیم که اگر $T \cup \{\varphi\}$ متناهیاً سازگار نباشد آنگاه $T \cup \{\neg\varphi\}$ متناهیاً سازگار است. اگر $T \cup \{\varphi\}$ متناهیاً سازگار نباشد، فرمولهای $\psi_۱, \dots, \psi_n \in T$ موجودند به طوری که $\vdash \neg(\psi_۱ \wedge \dots \wedge \psi_n \wedge \varphi)$ یعنی

$$\star \quad \vdash \neg(\psi_۱ \wedge \dots \wedge \psi_n) \vee \neg\varphi$$

حال اگر $T\cup\{\neg\varphi\}$ هم ناسازگار باشد به طور مشابه

$$\star\star \quad \vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \vee \varphi$$

پس فرمولهای زیر قابل اثبات هستند (به ترتیب بنا به * و **)

$$\varphi \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$$
$$\neg\varphi \to \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$$

بنا به تاتولوژی زیر

$$\big((p \to q) \wedge (\neg p \to q)\big) \to q$$

از دو عبارت بالا به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

$$\vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$$

و این با متناهیاً سازگار بودن T تناقض دارد.

برای اثبات لم با فرض شمارا بودن زبان کافی است تئوریهای T_i را به صورت زیر بسازیم

$$T_1 = \begin{cases} T\cup\{\varphi_1\} & \text{در صورتی که } T\cup\{\varphi_1\} \text{ متناهیاً سازگار باشد} \\ T\cup\{\neg\varphi_1\} & \text{در صورتی که } T\cup\{\neg\varphi_1\} \text{ متناهیاً سازگار باشد} \end{cases}$$

به همین ترتیب

$$T_i = \begin{cases} T_{i-1}\cup\{\varphi_i\} & \text{در صورتی که } T_{i-1}\cup\{\varphi_i\} \text{ متناهیاً سازگار باشد} \\ T_{i-1}\cup\{\neg\varphi_i\} & \text{در صورتی که } T_{i-1}\cup\{\neg\varphi_i\} \text{ متناهیاً سازگار باشد} \end{cases}$$

آنگاه تئوری $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i$ متناهیاً سازگار و کامل است. $\square$

۱۷.۰ جلسه‌ی هفدهم، قدم دوم و اوج اثبات

در جلسه‌ی قبل نشان دادیم که هر تئوریِ متناهیاًسازگار را می‌توان در یک تئوریِ متناهیاًسازگارِ هنکینی نشاند. نیز گفتیم که یک تئوری T را کامل می‌نامیم، هرگاه برای هر Lجمله‌ی φ داشته باشیم $T \ni \neg\varphi$ یا $\varphi \in T$. لم زیر را در جلسه‌ی قبل با فرض شمارا بودن زبان ثابت کردیم. اینک اثباتی برای آن بدون فرض شمارا بودن زبان و بر پایه‌ی لم زُرن آورده‌ایم.

لم ۱۸۴. اگر T متناهیاً سازگار باشد، آنِ گاه تئوری $T \subseteq T^*$ موجود است به طوری که T^* متناهیاً سازگار و کامل است.

اثبات. مجموعه‌ی Σ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\Sigma = \{T' \supseteq T \mid \text{متناهیاً سازگار است } T'\}$$

روی Σ ترتیب $\subseteq$ را در نظر بگیرید؛ یعنی تعریف کنید:

$$T' \leq T'' \Leftrightarrow T' \subseteq T''$$

فرض کنید $\{T_\lambda\}_{\lambda\in I}$ یک زنجیر از اعضای Σ باشد (توجه کنید که I یک مجموعه ی مرتب خطی است)؛ پس

$$\lambda < \lambda' \Rightarrow T_\lambda \subseteq T'_\lambda$$

ادعا.

$$\bigcup_{\lambda\in I} T_\lambda \in \Sigma$$

اثبات ادعای بالا را به عنوان تمرین رها می‌کنم (باید ثابت کنید که $\bigcup_{\lambda\in I} T_\lambda \in \Sigma$ متناهیاًسازگار است). حال شرایط لم زرن [40] برقرار است، بنابراین Σ دارای یک عنصر ماکسیمال به نام T^* است. دقت کنید که T^* متناهیاًسازگار است زیرا $T^* \in \Sigma$.

ادعا. T^* کامل است.

اثبات. فرض کنید φ یک Lجمله باشد و

$$T \cup \{\varphi\} \text{ متناهیاً ناسازگار باشد} \qquad (۱)$$

$$T \cup \{\neg\varphi\} \text{ متناهیاً ناسازگار باشد} \qquad (۲)$$

از (۱) نتیجه می‌گیریم که جملات $\psi_۱, ..., \psi_n \in T$ موجودند به طوری که

$$\vdash \neg(\psi_۱ \wedge ... \wedge \psi_n \wedge \varphi)$$

پس

$$\vdash \neg(\psi_۱ \wedge ... \wedge \psi_n) \vee \neg\varphi$$

پس

$$\vdash \varphi \to \neg(\psi_۱ \wedge ... \wedge \psi_n) \qquad (*)$$

و به طریق مشابه از (۲) نتیجه می‌شود که

$$\vdash \neg\varphi \to \neg(\psi_۱ \wedge ... \wedge \psi_n) \qquad (**)$$

بنابه $(**)$, $(*)$ و تاتولوژی

$$(p \to q) \wedge (\neg p \to q) \to q$$

[40] به جزوه‌ی مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید

از قوانین دستگاه هیلبرت نتیجه می گیریم که

$$\vdash \neg(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$$

و این نتیجه متناقض با سازگاری T است. $\square$

در این جا قدم بزرگ دوم برای اثبات قضیه‌ی تمامیت برداشته شد: **هر تئوری متناهیاً سازگار در یک تئوری متناهیاً سازگار کامل می نشیند.** از ترکیب متوالیِ قدم اول و قدم دوم به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

نتیجه ۱۸۵. هر تئوری متناهیاًسازگار در یک تئوری متناهیاً سازگار کامل هنکینی می نشیند. (اثبات در کلاس تمرین)

فرض کنید T یک تئوریِ متناهیاًسازگار باشد، آنگاه T در یک تئوریِ متناهیاًسازگارِ هنکینی می‌نشیند؛ اگر ثابت کنیم که آن تئوری دارای مدل است، طبیعتاً تئوری ما نیز دارای مدل خواهد بود. پس با اثبات قضیه‌ی زیر، اثبات تمامیت به پایان می‌رسد.

قضیه ۱۸۶. هر تئوریِ متناهیاًسازگارِکاملِ‌هنکینی دارای مدل است (در زبان $L \cup C$).

$$\exists \mathfrak{M} \ \forall \varphi \in T \ \ \mathfrak{M} \models \varphi$$

اثبات. در طی اثبات زیر از یک مجموعه شروع می‌کنیم، آن را تبدیل به یک ساختار می‌کنیم و سپس بررسی می‌کنیم که آیا مدلی برای تئوری مورد نظر ما هست یا نه.

مجموعه‌ی M' را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$M' = \{a_c | \ c \in C\}$$

دقت کنید که در مجموعه‌ی بالا برای هر ثابتِ $c \in C$ یک شیءِ a_c کنار گذاشته‌ایم. روی M' رابطه‌ی زیر را تعریف کنید.

$$a_c \approx a'_c \ \Leftrightarrow \ T \vdash c = c'$$

(به عنوان تمرین با استفاده از اصول تساوی ثابت کنید که) $\approx$ یک رابطه ی هم ارزی روی M' است. حال مجموعه‌ی M را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$M = M' / \approx$$

پس M را مجموعه‌ی کلاسهای هم‌ارزی روی M' با رابطه‌ی $\approx$ گرفته‌ایم. به بیان دیگر، مجموعه‌ی ثوابت را به صورت جهانِ ساختار مورد نظرمان گرفته‌ایم با این فرض که دو عنصرِ این جهان در واقع یک عنصر هستند هرگاه تئوریِ T چنین گفته باشد!
در ادامه، بقیه چیزها را نیز به گردنِ خودِ تئوریِ T خواهیم انداخت!

تعبیر علائم زبانی در M.

تعبیر ثوابت:

$$c^M = a_c$$

تعبیر توابع:

فرض کنید $f(x_۱, ..., x_n) \in L$. تعریف می کنیم:

$$f^M(a_{c_۱}, ..., a_{c_n}) = a_{c_{n+۱}} \Leftrightarrow T \vdash f(c_۱, ..., c_n) = c_{n+۱}$$

دقت کنید که

$$T \vdash f(c_۱, ..., c_n) = f(c_۱, ..., c_n)$$

همچنین (بنا به لم سور وجودی)

$$\vdash f(c_۱, ..., c_n) = f(c_۱, ..., c_n) \to \exists x f(c_۱, ..., c_n) = x$$

پس

$$T \vdash \exists x f(c_۱, ..., c_n) = x$$

حال بنا به هنکینی بودنِ T ثابتِ $C_{n+۱}$ موجود است به طوری که

$$T \vdash_{L \cup C} \exists x f(c_۱, ..., c_n) = x \to f(c_۱, ..., c_n) = c_{n+۱}.$$

پس

$$T \vdash f(c_۱, ..., c_n) = c_{n+۱}.$$

بنابراین تابعِ ما واقعاً هر عنصر را به جائی می‌برد!

خوش تعریفی تابع f. خوش‌تعریف بودن، یعنی تابع بودن. باید ثابت کنیم که

$$(a_{c_۱} = a_{c'_۱} \wedge ... \wedge a_{c_n} = a_{c'_n} \wedge) \Rightarrow f^M(a_{c_۱}, ..., a_{c_n}) = f^M(a_{c'_۱}, ..., a_{c'_n})$$

عبارت بالا بنا به تعریف تابع و بنا به اصول تساوی برقرار است.

تعبیر روابط: تعریف می‌کنیم

$$R^M(a_{c_۱}, ..., a_{c_n}) \Leftrightarrow T \vdash R(c_۱, ..., c_n)$$

دوباره خوش‌تعریفی از اصول دستگاه هیلبرت نتیجه می‌شود.

پس از یک مجموعه از ثوابت شروع کردیم و به یک Lساختار رسیدیم:

$$\mathfrak{M} = (M, f^M, R^M, C^M)_{f,R,C \in L \cup C}$$

تنها چیزی که باقی مانده، این است که ثابت کنیم که $\mathfrak{M}$ مدلی برای تئوری T است؛ یعنی برای هر جمله‌ی $\phi \in T$ داریم $\mathfrak{M} \models \phi$.

ادعا. برای هر $\varphi \in T$ داریم
$$\mathfrak{M} \models \varphi$$
ادعای بالا را در جلسه‌ی بعد با استقراء روی ساخت فرمولها ثابت خواهیم کرد. □

از خانم گلنوش خورسندی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۱۸.۰ جلسه‌ی هجدهم

در حال اثبات قضیه‌ی زیر بودیم:

قضیه ۱۸۷. اگر T متناهیاً سازگارِ هنکینیِ کامل باشد آن‌گاه T دارای مُدِل است.

گفتیم که جهان مدل مورد نظر ما قرار است به صورت
$$M = \{a_c | c \in C\}$$
باشد که در آن C مجموعه‌ی ثوابتِ موجود در زبانِ $L \cup C$ است. تعریف کردیم
$$a_c = a_{c'} \iff T \vdash c = c'$$
همچنین تعبیر توابع، روابط و ثوابت صورت گرفت و ساختار زیر معرفی شد:
$$\mathfrak{M} = \langle M, f^{\mathfrak{M}}, R^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}} \rangle$$
تنها اثبات گفته‌ی زیر مانده است:

لم ۱۸۸. برای هر جمله‌ی $\varphi \in T$ داریم
$$\mathfrak{M} \models \varphi$$

اثبات. با استقراء روی ساخت جمله‌ی φ.
(۱) فرض کنید φ جمله‌ای به صورت $t_1(c_1, \dots, c_n) = t_2(c_1, \dots, c_n) \in T$ باشد. هدفمان اثبات این است که
$$\mathfrak{M} \models t_1(c_1, \dots, c_n) = t_2(c_1, \dots, c_n).$$

فرض:
$$(1) \quad T \vdash t_1(c_1, \dots, c_n) = t_2(c_1, \dots, c_n)$$

بنا به لم سور وجودی

$$\text{۲}\quad T \vdash t_1(c_1, \ldots, c_n) = t_2(c_1, \ldots, c_n) \to \exists x \quad t_1(c_1, \ldots, c_n) = x$$

$$\text{۱}, \text{۲}, MP \Rightarrow \text{۳} \quad T \vdash \exists x \quad t_1(c_1, \ldots, c_n) = x$$

از طرفی T یک تئوری هنکینی است. بنابراین شاهدِ c_{n+1} موجود است به طوری که

$$\text{۴}\quad T \vdash \exists x \quad t_1(c_1, \ldots, c_n) = x \to t_1(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1}$$

$$\text{۳}, \text{۴}, MP \Rightarrow T \vdash t_1(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1}$$

تمرین ۱۸۹ (با استقراء روی ساخت ترم‌ها). نشان دهید اگر $T \vdash t(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1}$ آنگاه

$$\mathfrak{M} \models t(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1}$$

و از آن حکم لم را نتیجه بگیرید.

۲ فرض کنید φ فرمولی در T به صورت

$$R(t_1, \ldots, t_n)$$

باشد. ادعا:

$$\mathfrak{M} \models R\Big(t_1(c_1, \ldots, c_n), \ldots, t_n(c_1, \ldots, c_n)\Big)$$

مشابه بخشهای قبلی اثبات، نخست ثابت کنید که ثوابتِ $c'_1, \ldots, c'_n$ موجودند به طوری که

$$T \vdash t_i(c_1, \ldots, c_n) = c'_i$$

بنابراین

$$\mathfrak{M} \models t_i(c_1, \ldots, c_n) = c'_i$$

کافی است نشان دهیم که

$$\mathfrak{M} \models R(c'_1, \ldots, c'_n)$$

از آنجا که

$$T \vdash R(c'_1, \ldots, c'_n)$$

بنا به قسمت‌های قبل

$$\mathfrak{M} \models R(c'_1, \ldots, c'_n)$$

$$\Big(R^{\mathfrak{M}}(a_{c'_1}, \ldots, a_{c'_n})\Big)$$

③ فرض کنید φ به صورت $\psi_۱ \wedge \psi_۲$ باشد و حکم برای $\psi_۱, \psi_۲$ برقرار باشد. فرض کنید که

$$T \vdash \psi_۱ \wedge \psi_۲$$

از این بنا به تاتولوژیِ

$$p \wedge q \to p$$

نتیجه می‌شود که

$$② \quad T \vdash \psi_۱$$

بنابراین (بنا بر فرض استقراء)

$$\mathfrak{M} \models \psi_۱$$

به طور مشابه

$$T \vdash \psi_۲$$

پس

$$\mathfrak{M} \models \psi_۲$$

بنابراین

$$\mathfrak{M} \models \psi_۱ \wedge \psi_۲$$

پیش از بیان ادامه‌ی اثبات دو تمرین زیر را پیشنهاد می‌کنم.

تمرین ۱۹۰. نشان دهید که اگر T کامل و متناهیاً سازگار باشد آن‌گاه T تحت استنتاج بسته است، یعنی هرگاه $T \vdash \varphi$ آنگاه $\varphi \in T$.

تمرین ۱۹۱. اگر T متناهیاً سازگار باشد آن‌گاه

$T \not\vdash \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$ سازگار باشد.

ادامه‌ی اثبات. ④ اگر φ به صورت $\exists x \quad \psi(x)$ باشد و حکم برای فرمولهای $\psi(c)$ برقرار باشد، و بدانیم که

$$① \quad T \vdash \exists x \quad \psi$$

آنگاه ادعا می‌کنیم که

$$\mathfrak{M} \models \exists x \quad \psi.$$

داریم

$$(۲) \quad T \vdash \exists x \psi(x) \to \psi(c)$$

$$(۱), (۲), MP \quad T \vdash \psi(c)$$

بنا به فرض استقراء

$$\mathfrak{M} \models \psi(a_c)$$

پس بنا به تعاریف،

$$\mathfrak{M} \models \exists x \quad \psi.$$

$\square$

سرانجام در اینجا اثبات قضیه‌ی تمامیت گودل به پایان رسید. خلاصه‌ی همه‌ی آنچه در چند جلسه‌ی اخیر گفتیم، عبارت زیر است:

$$\models \phi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash \phi.$$

قضیه‌ی تمامیت پُلِ میان نظریه‌ی اثبات و نظریه‌ی مدل است و نظریه‌ی مدل، با این قضیه خلق می‌شود. در این جلسه و جلسه‌ی آینده، به بیان برخی نتایج اولیه از این قضیه خواهیم پرداخت.

دقت کنید که ثابت کردیم که اگر T یک تئوری متناهیاً سازگار باشد آنگاه T دارای مدل است. بنابراین اگر برای هر $\varphi_۱, \dots, \varphi_n \in T$ داشته باشیم $T \nvdash \neg(\varphi_۱ \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ آنگاه T دارای مدل است. به بیان دیگر اگر برای هر $\varphi_۱, \dots, \varphi_n \in T$ اگر $\{\varphi_۱, \dots, \varphi_n\}$ متناهیاً سازگار باشد آنگاه T دارای مدل است. بنابراین اگر T یک تئوری باشد و برای هر $\varphi_۱, \dots, \varphi_n \in T$ یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ موجود باشد به طوری که

$$\mathfrak{M} \models \varphi_۱ \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

آنگاه ساختاری مانند $\mathbb{M}$ پیدا می‌شود به طوری که برای هر $\varphi \in T$

$$\mathbb{M} \models \varphi.$$

این عبارت، قضیه‌ی فشردگی نام دارد. برای من این قضیه دارای بُعدی فلسفی نیز هست. فرض کنید مجموعه‌ای نامتناهی از صفات داشته باشیم. اگر بدانیم که هر تعداد متناهی از آنها را یک موجودِ این جهانی می‌تواند داشته باشد، آنگاه می‌دانیم که موجودی برتر هست که همه‌ی آن صفات را همزمان با هم داراست. با مثالهای پیش رو درک درستی از این قضیه خواهید یافت.

قضیه ۱۹۲ (فشردگی). اگر هر بخش متناهی از T دارای مدل باشد آنگاه T دارای مدل است.

تعریف ۱۹۳. $T \models \varphi$ یعنی برای هر ساختارِ $\mathfrak{M}$ اگر $\mathfrak{M} \models T$ آنگاه $\mathfrak{M} \models \varphi$.

تمرین ۱۹۴. نشان دهید که

$$T \vdash \varphi \iff T \models \varphi$$

از آنچه تا به حال گفته شد، همچنین نتیجه می‌گیریم که اگر T یک تئوری کامل سازگار باشد آن‌گاه یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathfrak{M}$ وجود دارد به طوری که

$$T = Th(\mathfrak{M}).$$

یعنی هر تئوریِ کامل متناهیاً سازگار، در واقع تئوری کاملِ یک ساختار است (که معنی این در جلسات گذشته توضیح داده شده بود). اثبات این گفته آسان است. فرض کنید T یک تئوری کامل متناهیاًسازگار باشد، پس مدلی مانند $\mathfrak{M}$ دارد. حال اگر جمله‌ای در $\mathfrak{M}$ درست باشد، از دو حال خارج نیست، یا خودِ این جمله و یا نقیضِ آن در تئوری است. اگر نقیض آن در تئوری باشد، از آنجا که $\mathfrak{M}$ مدلی برای تئوری است، باید هم خود جمله و هم نقیضش در $\mathfrak{M}$ درست باشند، و این غیرممکن است.

یکی از کاربردهای لم فشردگی، تشخیص امکان اصلبندی کلاسهای مختلف است. برای روشن شدن این گفته به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۹۵. آیا می‌توان یک تئوری T برای کلاس متشکل از همه‌ی مجموعه‌های متناهی نوشت؟ (آیا می‌توان مجموعه‌ای از جملات به نام T پیدا کرد به طوری که یک مجموعه‌ی دلخواه M متناهی باشد اگروتنها اگر جملات T در آن درست باشد).

پاسخ. فرض کنید T یک تئوری در یک زبان مرتبه‌ی اول باشد که مجموعه‌های متناهی را اصل بندی کند. تئوری T' را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} T' = T \cup \{\exists x_{۱}, x_{۲} \quad x_{۱} \neq x_{۲}\} \cup \{\exists x_{۱}, x_{۲}, x_{۳} \quad (x_{۱} \neq x_{۲} \wedge x_{۲} \neq x_{۳} \wedge x_{۱} \neq x_{۳})\} \\ \cup \ldots \cup \{\exists x_{۱}, \ldots, x_n \quad \bigwedge x_i \neq x_j\} \cup \ldots \end{aligned}$$

ادعا: T' متناهیاً سازگار است.

فرض کنید $\Delta \subseteq T'$ متناهی باشد. ادعا می‌کنیم که Δ دارای مدل است. مجموعه‌ی Δ را می‌توان به صورتِ $\Delta'' \cup \Delta'$ نوشت که $\Delta'' \subseteq T$ و $\Delta' \subseteq T' - T$. ما حکمی بزرگتر را ثابت می‌کنیم؛ یعنی ثابت می‌کنیم که $T \cup \overset{\substack{\text{متناهی} \\ \uparrow}}{\Delta'}$ مدل دارد.

فرض کنید n بزرگترین عدد طبیعی باشد به طوری که

$$\exists x_{۱}, \ldots, x_n \quad \bigwedge x_i \neq x_j \in \Delta$$

از آنجا که T تئوری مجموعه‌های متناهی است پس T دارای یک مدل متناهی $\mathfrak{M}$ با اندازه‌ی حداقل n است. واضح است که

$$\mathfrak{M} \models \Delta.$$

حال از قضیه‌ی فشردگی نتیجه می‌شود که T' دارای یک مدل به نام $\mathfrak{N}$ است؛ یعنی

$$\mathfrak{N} \models T'$$

دقت کنید که بنا به اصولِ T' مجموعه‌ی N نامتناهی است. از طرفی

$$\mathfrak{N} \models T' \supseteq T$$

پس

$$\overset{\text{نامتناهی}}{\overset{\uparrow}{\mathfrak{N}}} \models T$$

و این تناقض است؛ زیرا قرار بود T تئوری مجموعه‌های متناهی باشد! $\square$

همان طور که در مثال بالا مشاهده کردید، قضیه‌ی فشردگی گاهی برای تعیین حد و مرز اصل‌پذیری استفاده می‌شود. در این باره در جلسه‌ی آینده نیز سخن خواهیم گفت.

یکی از مهمترینِ دیگر کاربردهای فشردگی، لم لُونهایم اِسکولم است. بنابر این لم، اگر یک تئوریِ T در یک زبان شمارا دارای مدل باشد، آنگاه دارای مدل از هر اندازه‌ی نامتناهی دلخواه است. از این رو مثلاً یک مدل شمارایِ M وجود دارد به طوری که $\mathfrak{M} \models Th(\mathbb{R}, +, \cdot)$. یعنی تمام ویژگی‌های مرتبه‌ی اول اعداد حقیقی را می‌توان در یک مدل شمارا نیز پیدا کرد. یا مثلاً می‌توان یک میدان بسته‌ی جبریِ شمارا پیدا کرد.

قضیه ۱۹۶ (لونهایم_اسکولم). فرض کنید T یک تئوری در یک زبان شمارا باشد که دارای حداقل یک مدلِ نامتناهی است. آنگاه T دارای مدل از هر سایزِ نامتناهیِ κ است.

اثبات. یک مجموعه ثوابت به صورت زیر، از اندازه‌ی κ به زبان اضافه کنید:

$$C = \{c_\lambda | \lambda < k\}$$

تئوری زیر را در نظر بگیرید:

$$T' = T \cup \{c_\lambda \neq c_{\lambda'} | \lambda, \lambda' \in C\}$$

ادعا: T' دارای مدل است. برای اثبات ادعای بالا، بنا به فشردگی کافی است ادعای زیر ثابت شود:

ادعا: هر بخش متناهی از T' دارای مدل است.

و برای اثبات این کافی است ثابت کنیم که هر بخشِ T' به صورت

$$\Delta = T \cup \overset{\text{متناهی}}{\overset{\uparrow}{\Delta'}}$$

دارای مدل است. دقت کنید که Δ' می‌گوید که nتا عنصر $c_{\lambda_1}, \dots, c_{\lambda_n}$ با هم متمایزند. اگر $\mathfrak{M}$ همان مدل نامتناهیِ T باشد که صورت قضیه بدان اشاره کرده است، باشد در آن حداقل n عنصر متمایز $a_1, \dots, a_n$ پیدا می‌شود. تعبیر کنید

$$c_{\lambda_i}^{\mathfrak{M}} = a_i$$

پس

$$\mathfrak{M} \models \Delta$$

پس T' دارای مدل است. آن مدل دارای سایزِ حداقل κ است. اثبات این که سایز این مدل می‌تواند دقیقاً κ باشد، در اثباتِ قضیه‌ی تمامیت نهفته است ولی فعلاً ترجیحاً وارد جزئیات آن نمی‌شوم (هر چند در زیر ایده‌ی مورد نظر را به صورت دیگری منتقل کرده‌ام). $\square$

در اثبات قضیه‌ی اصلی اگر سایز زبان $|\mathcal{L}|$ شمارا می‌بود، آنگاه تعداد ثوابتی که بدان اضافه می‌کردیم نیز شمارا می‌شد (زیرا تعداد فرمولها هم شمارا می‌شد). همچنین مدلی که ساختیم از ثوابت تشکیل شده بود.

$$M = (a_c)_{c \in C}$$

در واقع در آن اثبات، تئوری ما، تئوری کاملِ ساختاری بود که از ثوابت ساخته شده است. پس ما قضیه‌ی زیر را نیز ثابت کرده‌ایم:

قضیه ۱۹۷. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان شمارا (یا متناهی) باشد و T یک $\mathcal{L}$تئوریِ سازگار باشد. آنگاه T دارای مدلی شماراست.

۱۹.۰ جلسه نوزدهم، آنالیز نااستاندارد و شروع نظریه‌ی مجموعه‌ها

۱.۱۹.۰ ادامه‌ی کاربردهای قضیه‌ی فشردگی

یکی از ویژگی‌های مهم اعداد حقیقی، ویژگی ارشمیدسی است: هیچ عدد حقیقی r یافت نمی‌شود به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r > n,$$

به بیان معادل هیچ عدد حقیقی‌ای مانند r یافت نمی‌شود به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ۰ < r < \frac{۱}{n}.$$

و باز به بیان دیگر، در میدان اعداد حقیقی عبارت زیر درست است:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (۰, \frac{۱}{n}) = \emptyset.$$

ساختار میدان اعداد حقیقی، یعنی ساختارِ $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, ۰, ۱, \leq)$ را در زبان $\mathcal{L} = \{+, \cdot, ۰, ۱, \leq\}$ در نظر بگیرید. قرار دهید

$$T = Th(\mathfrak{R}) = \{\varphi \mid \mathfrak{R} \models \varphi\}$$

به بیان دیگر، T را تئوری کامل این ساختار گرفته‌ایم؛ یعنی همه‌ی ویژگی‌های مرتبه‌ی اول میدان اعداد حقیقی را در مجموعه‌ی T ریخته‌ایم. واضح است که

$$\mathfrak{R} \models T.$$

اما این تئوری مدلهای دیگری نیز غیر از $\mathfrak{R}$ می‌تواند داشته باشد. هر جمله‌ای که در $\mathfrak{R}$ درست باشد، در هر یک از آن مدلها نیز درست است. طبیعی است سوال زیر را از خود بپرسیم:

سوال ۱۹۸. آیا ویژگی ارشمیدسی در مدل‌های دیگر T نیز برقرار است؟

در ادامه به پاسخ این سوال پرداخته‌ایم. یک ثابت c به زبان $\mathcal{L}$ اضافه کنید و قرار دهید:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}.$$

تئوری T' را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$T' = T \cup \{c > ۱, c > ۱ + ۱, c > ۱ + ۱ + ۱, c > ۱ + ۱ + ۱ + ۱, \cdots, c > \underbrace{۱ + \cdots + ۱}_{n}, \cdots\}.$$

ادعا می‌کنیم که T' دارای مدل است. بنا به قضیه‌ی فشردگی، برای اثبات این ادعا، کافی است نشان دهیم که هر بخش متناهی $\triangle \subseteq T'$ دارای مدل است. می‌توان نوشت:

$$\triangle = \triangle' \cup \triangle''$$

به طوری که $\triangle' \subseteq T$ و $\triangle'' \subseteq T$. اگر نشان دهیم مجموعه‌ی $T \cup \triangle''$ دارای مدل است، واضح است که از آن نتیجه می‌شود که $\triangle$ هم دارای مدل است. فرض کنید

$$\triangle'' = \{c > ۱, c > ۱ + ۱, \cdots, c > \underbrace{۱ + \cdots + ۱}_{n}\}$$

ساختار $\mathfrak{R}$ را در نظر بگیرید. تعبیر کنید

$$c^{\mathfrak{R}} = n + ۲$$

آنگاه $\mathfrak{R} \models T \cup \triangle''$. بنابراین هر بخش متناهی از T' دارای مدل است. پس بنا به قضیه‌ی فشردگی T' دارای مدلی به نام $\tilde{\mathfrak{R}}$ است.

دقت کنید که هر جمله‌ای که در مورد ساختار اعداد حقیقی درست باشد، در موردِ $\tilde{\mathfrak{R}}$ نیز درست است. اما علاوه بر این، در $\tilde{R}$ عنصری (همان تعبیر ثابتِ c) موجود است که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر است. واضح است که $\frac{۱}{c}$ از تمامِ $\frac{۱}{n}$ ها کوچکتر است. پس $\tilde{\mathfrak{R}}$ یک میدان ارشمیدسی نیست. در این میدان، عناصری **بی‌نهایت‌کوچک** و عناصری **بی‌نهایت‌بزرگ** یافت می‌شوند. به بیان دیگر، ارشمیدسی بودن میدان اعداد حقیقی، یک ویژگیِ مرتبه‌ی اول نیست که در تئوری کامل این میدان فرورفته باشد.

مدل $\tilde{\mathfrak{R}}$ را یک **مدل نااستاندارد** برای تئوری اعداد حقیقی می‌نامیم.

آنالیز نااستاندارد، یک گرایش از نظریه‌ی مدل است که در آن مفاهیم آنالیزی در مدلهای نااستاندارد مطالعه می‌شوند. [۴۱] در زیر برای نمونه به تحلیل مفهوم پیوستگی در آنالیز نااستاندارد پرداخته‌ایم. دقت کنید که در بیان مفهوم پیوستگی، شهودمان این است که وقتی که x **بی‌نهایت** به a نزدیک شود آنگاه $f(x)$ بی‌نهایت به $f(a)$ نزدیک شود. بی‌نهایت نزدیک شدن را در حساب، نیوتون و لایبنیتز به صورت هوشمندانه‌ای فرمول‌بندی کرده‌اند: $f(x)$ به هر **اندازه‌ای که شما بخواهید** به $f(a)$

[۴۱] آبراهام رابینسون کتابی با عنوان «آنالیز نااستاندارد» دارد که خواندنی است.

نزدیک می‌شود به شرط این که x **به اندازه‌ی کافی** به a نزدیک شده باشد. در آنالیز نااستاندارد، وجود عناصر بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ، [۴۲] درک این مفهوم را راحت‌تر می‌کند.

فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته در نقطه‌ی صفر باشد به طوری که $f(0) = 0$. [۴۳] ساختار $\mathfrak{R}_1 = (\mathbb{R}, +, ., 0, 1, <, f)$ را در زبان $\mathcal{L} \cup \{f\}$ در نظر بگیرید. دراین زبان یک نماد تابعی قرار داده‌ایم تا بتوانیم درباره‌ی تابعِ f صحبت کنیم. حال قرار دهید $T_1 = Th(\mathfrak{R}_1)$. فرض کنید $(\tilde{\mathfrak{R}}_1, \tilde{f})$ یک مدل نااستاندارد برای T_1 باشد که دارای عناصر بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ است. در این مدل، $\tilde{f}$ تابعی از $\tilde{R}_1$ به $\tilde{R}_1$ است که همه‌ی ویژگی‌های f در $\mathbb{R}$ را داراست.

لم ۱۹۹. تابع f در $\mathbb{R}$ در نقطه‌ی صفر پیوسته است اگر و تنها اگر تابع $\tilde{f} : \tilde{\mathfrak{R}}_1 \to \tilde{\mathfrak{R}}_1$ عناصر بی‌نهایت کوچک را به عناصر بی‌نهایت کوچک تصویر کند.

اثبات. فرض کنید f در صفر پیوسته باشد و $x \in \tilde{\mathbb{R}}_1$ بی‌نهایت کوچک باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\tilde{f}(x)$ بی‌نهایت کوچک است. برای این منظور باید نشان دهیم که

$$\forall n \quad \tilde{f}(x) < \frac{1}{n}$$

فرض کنید N یک عدد طبیعی دلخواه باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که $\tilde{f}(x) < \frac{1}{N}$.

توجه کنید که در تابعِ f در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس

$$\mathfrak{R}_1 \models \exists \delta \quad \forall x \quad |x| < \delta \to |f(x)| < \frac{1}{N}$$

از آنجا که $\mathbb{R}$ ارشمیدسی است، $M \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که

$$(\bigstar) \quad \mathfrak{R} \models \forall x |x| < \frac{1}{M} \to |f(x)| < \frac{1}{N}$$

به بیان دیگر

$$\mathfrak{R}_1 \models \forall x \quad (M.|x| < 1 \to N.|f(x)| < 1)$$

ویژگی $(\bigstar)$ یک ویژگی مرتبه اول است پس در تئوری T قرار دارد. پس باید توسط $\tilde{\mathfrak{R}}_1$ هم برآورده شود؛ پس

$$\tilde{\mathfrak{R}}_1 \models \forall x |x| < \frac{1}{M} \to |f(x)| < \frac{1}{N}$$

حال اگر $|x|$ بی‌نهایت کوچک باشد آنگاه به طور خاص $|x| < \frac{1}{M}$، پس $|f(x)| < \frac{1}{N}$؛ همانگونه که می‌خواستیم.

حال به اثبات قسمت عکس می‌پردازیم: فرض کنید که $\tilde{f}$ عناصر بی‌نهایت کوچک در $\tilde{\mathfrak{R}}_1$ را به عناصر بی‌نهایت کوچک ببرد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. اگر f پیوسته نباشد، آنگاه جمله‌ی زیر در اعداد حقیقی درست است:

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \quad (|x| < \delta \wedge |f(x)| > \epsilon).$$

[۴۲] infinitesimal, infinitely large

[۴۳] فرض صفر بودن را تنها برای راحت شدن بحثها کرده‌ایم.

از آنجا که میدان اعداد حقیقی، ارشمیدسی است، حکم بالا برای یک عددِ $\epsilon < \frac{۱}{n}$ درست است. پس جمله‌ی زیر در اعداد حقیقی درست است:

$$\forall\delta > ۰ \quad \exists x \quad (|x| < \delta \wedge |f(x)| > \frac{۱}{n}).$$

جمله‌ی بالا در موردِ $(\tilde{\mathfrak{R}}_۱, \tilde{f})$ نیز درست است (زیرا این جمله در تئوری ما قرار دارد). اما این تناقض با فرضمان دارد: اگر δ را بی‌نهایت کوچک بگیریم، فرضمان این است که اگر $|x| < \delta$ آنگاه $|f(x)|$ از تمام $\frac{۱}{n}$ ها کوچکتر است. $\square$

در مورد کاربردهای لم فشردگی در ریاضیات مثالهای شیرین فراوانی می‌توانم ذکر کنم، ولی ترجیح می‌دهم بحث منطق مرتبه‌ی اول را فعلا در همین جا خاتمه دهم و در باقی ترم به نظریه‌ی مجموعه‌ها بپردازم.

نظریه‌ی مجموعه‌ها

استاد عزیزی [۴۴] می‌گفت که برای فهمیدن این که مجموعه چیست، حداقل ده سال ریاضیات در دوره‌ی تکمیلی لازم است. با چنین احتسابی، خودِ نگارنده نیز دقیق نمی‌داند که بالاخره این مجموعه چیست؛ با این حال به نظر نگارنده، با وجود نیم ترم تدریس منطق مرتبه‌ی اول، در هیچ درس دیگری به این اندازه شانس شناختن و شناساندن مجموعه وجود ندارد. در درس مبانی ریاضی درباره‌ی پیچیدگی مفهوم مجموعه سخن زیاد گفته‌ام، اما در این درس، به علت آشنائی مخاطب با منطق [۴۵] ، دستم بازتر است.

در دوره‌ی کارشناسی فرامی‌گیریم که تقریبا همه‌ی پدیده‌های ریاضی به نوعی مجموعه هستند. هر عدد طبیعی یک مجموعه است:

$$۰ = \emptyset$$

$$۱ = \{۰\} = \{\emptyset\}$$

$$۲ = \{۰, ۱\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$۳ = \{۰, ۱, ۲\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\vdots$$

مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بالا وجود دارد و به آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی گفته می‌شود. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه، یک مجموعه است؛ پس روابط مجموعه‌اند. اعداد صحیح از تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی زیر روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی حاصل می‌شوند: (پس مجموعه تشکیل می‌دهند)

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$$

$$(m, n) \sim (m', n') \iff m + n' = n + m'$$

[۴۴] مارتین زیگلر
[۴۵] ان‌شاءالله!

(به عنوان تمرین، ثابت کنید که رابطه‌ی فوق، هم‌ارزی است و کلاس‌های آن، اعداد صحیح هستند.) اعداد گویا از تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی زیر روی $\mathbb{Z}$ به دست می‌آیند، و بدین ترتیب آنها هم یک مجموعه تشکیل می‌دهند.

$$(m,n) \sim (m',n')$$

$$m.n' = n.m'$$

هر عدد حقیقی یک دنباله‌ی کُشی از اعداد گویاست. هر دنباله در اعداد گویا در واقع یک تابعِ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ است. اعداد طبیعی مجموعه‌اند و توابع نیز مجموعه‌اند پس اعداد حقیقی نیز مجموعه‌اند. با این تفاسیر، فهم بسیاری از پدیده‌های ریاضی، منوط به فهم مجموعه است.

تعریف کانتور از مجموعه به صورت زیر است:

> Unter eine Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente von M gennant werden) zu einem Ganzen.

تعریف ۲۰۰. مجموعه، تجمعی از عناصر معین و متمایز است از اشیائی در اطراف ما یا در تصور ما، که به آن اشیاء، اعضای مجموعه گفته می‌شود.

پیش از ادامه دادن بحث، بیت زیبای زیر از حافظ را به یاد آورید:

معشوق چون نقاب ز رُخ در نمی‌کشد
هر کس حکایتی به تصور چرا کنند!

در واقع هر تعریفی که از مجموعه‌ها ارائه دهیم، منجر به ایجاد تصوری از مجموعه در ذهن می‌شود. تنها راهی که با آن بتوان تصورها را به هم نزدیک کرد، اصل‌بندی مجموعه هاست. وقتی مجموعه‌ها را اصلبندی می‌کنیم، در واقع به هر کس اجازه‌ی داشتن تصور ذهنی خود از مجموعه را می‌دهیم، ولی آن تصورات را به نوعی قانونمند می‌کنیم که میانشان واگرائی و تناقضات رخ ندهد.

در ادامه، به بررسی نظریه‌ی مجموعه‌ها، در منطق مرتبه‌ی اول پرداخته‌ایم. در واقع می‌خواهیم یک **تئوری** یا یک **اصل‌بندی** برای مجموعه‌ها بنویسیم (و بدینسان یک تئوری یا اصلبندی برای ریاضیات خواهیم نوشت).

زبانی که برای نظریه‌ی مجموعه‌ها در نظر می‌گیریم، به صورت زیر است:

$$\mathcal{L} = \{\in\}$$

در این زبان تنها یک نماد رابطه‌ای دو موضعی داریم که به آن نماد عضویت گفته می‌شود. نظریه‌ی مجموعه‌ها، آنگونه که کانتور وصفشان کرده است، تنها نیازمند دو اصل است:

اصل گسترش. گفتیم که مجموعه باید از عناصر مشخصی تشکیل شده باشد. یک سری عناصر مشخص، تنها **یک** مجموعه به دست می‌دهند. این گفته، موضوع اصل گسترش است: دو مجموعه که اعضای یکسان داشته باشند، در واقع یک مجموعه هستند. اصل گسترش را در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\forall x,y \quad (\forall z(z\in x \leftrightarrow z\in y)\to x=y)$$

از خانم زهرا شیروانیان بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

۲۰.۰ جلسات بیستم، بیست ویکم و بیست‌ودوم، اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

هدفمان در ادامه‌ی درس، ارائه‌ی یک اصل‌بندی (به بیان دیگر، ارائه‌ی یک تئوری) برای نظریه‌ی مجموعه‌هاست. [۴۶] یادآوری می‌کنم که در مورد یک تئوری T دانستن سه چیز مهم است:

۱. آیا این تئوری متناهیا سازگار است؟ (یعنی تناقض نمی‌دهد).

$$(T \nvdash \varphi \wedge \neg\varphi)$$

۲. مدل های این تئوری به چه شکل هستند.

$$\mathfrak{M} \models T.$$

۳. آیا این تئوری کامل است؟ (یعنی اگر ϕ یک جمله‌ی مرتبه‌ی اول باشد، یا خودش و یا نقیض در تئوری ثابت شود).

همه‌ی این سوالات را باید درباره‌ی اصولی که برای نظریه‌ی مجموعه‌ها ارائه خواهیم کرد، هم پرسید.

در جلسه‌ی قبل، درباره‌ی نظریه‌ی کانتور برای مجموعه‌ها صحبت کردیم. این نظریه، دارای دو اصل است:

اصل ۱ (گسترش).

$$\forall x, y \ \ \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y \rightarrow x = y)$$

اصل ۲ (اصل شمول). فرض کنید $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ یک فرمول مرتبه اول در زبانِ $L = \{\in\}$ باشد. برای هر $y_1, \ldots, y_n$ سیستمِ

$$z = \{x | \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)\}$$

یک مجموعه است. بیان رسمی این اصل به صورت زیر است:

$$\forall y_1, \ldots, y_n \exists z \forall t \quad \big(t \in z \leftrightarrow \phi(t, y_1, \ldots, y_n)\big)$$

دو اصل بالا، اصول نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور (یا اصول ساده‌انگارانه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها) نامیده می‌شوند.

لم ۲۰۱. نظریه مجموعه های کانتور ناسازگار است. (یعنی نظریه مجموعه‌های کانتور تناقض آمیز هستند.)

اثبات. فرمول $\varphi(x) : x \notin x$ فرمولی در زبان نظریه مجموعه هاست. پس بنا به اصل شمول، عبارت زیر از اصول نظریه‌ی مجموعه‌های ساده‌انگارانه نتیجه می‌شود:

$$\exists z \ \ \forall t \ \ t \in z \leftrightarrow t \notin t$$

[۴۶] علت تأخیر در بارگذاری این جلسات، مشغولیتم به اسباب‌کشی و از آن مهم تر، بی‌انگیزگیم به علت ناامیدی از دانشجویان بود. سرِ کلاس درسی که برای لحظه‌لحظه‌ی آن وقت می‌گذارم و کلاسی که در آن دارد مبانی ریاضیات به دقیق‌ترین وجه آن تدریس می‌شود، و کلاسی که همسطح کلاسهای بهترین دانشگاههای دنیاست، دانشجویان علاقه‌مندم غایب و اکثر حاضرین، به طور گروهی مشغول مطالعه و حتی بحث درباره‌ی درسی دیگر بودند که امتحانش را داشتند. نمی‌دانم این صحنه را چگونه از ذهن پاک کنم. با این حال، آقایان نیک‌آبادی و محمدصالحی، و خانم پیری زحمت تایپ این جلسات را کشیدند و من نیز در پاسخ، مجاب به بازخوانی و تصحیح آنها شدم.

به بیان دیگر $z = \{x|x \notin x\}$ یک مجموعه است. از فرمول بالا، فرمول زیر نتیجه می‌شود:

$$\exists z \quad z \in z \leftrightarrow z \notin z.$$

فرمول بالا، تناقض آمیز است. $\square$

توجه کنید که اگر قضیه‌ی تمامیت (مدل داشتن هر تئوری سازگار) را در نظر بگیریم، اثبات بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت: اگر اصول ساده‌انگارانه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها با هم سازگار باشند، آنگاه مدلی مانند M برای آنها وجود دارد. اعضای این مدل، مجموعه نامیده می‌شوند. پس

$$M \models \exists t \ \forall z \ \ z \in t \leftrightarrow z \notin z$$

پس مجموعه‌ی a در M موجود است به طوری که

$$M \models \forall z \quad z \in a \leftrightarrow z \notin z.$$

بنابراین

$$M \models a \in a \leftrightarrow a \notin a.$$

که این امکان‌پذیر نیست.

آنچه در بالا به عنوان اثبات ناسازگاری نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور ارائه شد، در واقع **پارادوکس راسل** نام دارد. وقوع این پارادوکس و پاردوکسهای مشابه، منجر به تلاشهای زیادی برای ارائه‌ی یک اصل‌بندی عاری از تناقضات برای ریاضیات شد. ازمیان این تلاشها، اصول زِرملو و فرانکل به همراه اصل انتخاب [۴۷]، مورد اقبال عمومی بهتری قرار گرفت. در ادامه‌ی درس به بیان این اصول خواهیم پرداخت. نیز سه نکته‌ای را که درباره‌ی یک تئوری در ابتدای این جلسه گفتیم، باید درباره‌ی این اصول نیز بررسی کنیم. دقت کنید که اگر اصول زرملو و فرانکل به علاوه به اصل انتخاب (که به آنها از این به بعد ZFC خواهیم گفت) برای نظریه‌ی مجموعه‌ها، سازگار باشند، آنگاه نظریه‌ی مجموعه‌ها (بنا به تمامیت) دارای یک مدل است. به هر یک از اشیای موجود در این مدل، یک مجموعه گفته می‌شود. بنابراین، تنها به چیزهایی مجموعه می‌گوییم که وجودشان (یعنی مجموعه بودنشان) از اصول ZFC نتیجه شود. پس مثلاً a یک مجموعه است هرگاه

$$ZFC \vdash \exists x \quad x = a$$

به بیان دیگر، a در صورتی مجموعه است که با استفاده از اصول هیلبرت در ZFC بتوان ثابت کرد که یک شیء وجود دارد که همان a است. در ادامه، به بیان اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها پرداخته‌ایم.

اصل ۱ (اصل گسترش).

$$\forall x, y \ \ ((\forall z \quad z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

[۴۷] Zermelo, Fränkel, axiom of choice

اصل ۲ (اصل تصریح). این اصل در واقع با ایجاد یک محدودیت روی اصل شمول کانتور به دست می‌آید. در آنجا می‌گفتیم که سیستم متشکل از اشیائی که یک ویژگی مشترک دارند، مجموعه است. در اینجا آن سیستم برای ما خیلی بزرگتر از آن است که مجموعه باشد، پس آن را به چیزی که می‌دانیم یک مجموعه است تحدید می‌کنیم. به بیان دقیقتر، اگر بدانیم که $y_۰, \ldots, y_n$ مجموعه هستند و φ یک فرمول در زبان نظریه مجموعه ها باشد آنگاه عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{z \in y_۰ | \varphi(z, y_۱, \ldots, y_n)\}$$

به بیان دقیق تر عبارت زیر یکی از اصولِ (در واقع یک شِمای اصل) در ZFC است:

$$\forall y_۰, y_۱, \ldots, y_n \exists t \forall z \quad z \in t \leftrightarrow z \in y_۰ \wedge \varphi(z, y_۲, \ldots, y_n)$$

منظور از این که عبارت بالا یک شمای اصل است این است که برای هر یک فرمولِ φ باید یک اصل به صورت بالا در ZFC در نظر گرفته شود.

نیز دقت کنید که سور $\forall y_۰ \ldots y_n$ در واقع برای پارامترها آمده است. به بیان نظریه‌ی مدلی، اگر M یک جهان برای مجموعه باشد، و $a_۰, \ldots a_n$ اشیایی (مجموعه‌هایی) در این جهان باشند، آنگاه شیئی در این جهان وجود دارد که دقیقا با عبارت زیر توصیف می‌شود:

$$\{x \in a_۰ | \phi(x, a_۱, \ldots, a_n\}.$$

مثال ۲۰۲. اگر x, y دو مجموعه باشند آنگاه $x \cap y$ یک مجموعه است. منظور از $x \cap y$ سیسمتی است که اشیای آن، هم متعلق به x و هم متعلق به y هستند.

$$x \cap y = \{z \in x | z \in y\}$$

اثبات. بنابر اصل تصریح

$$ZFC \vdash \forall x, y \exists t \forall z \quad z \in t \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y$$

دقت کنید که در این اثبات نشان داده‌ایم که اگر دو چیز مجموعه باشند (سور عمومی) چیز دیگری وجود دارد (پس آن هم مجموعه است) که اشتراک آندوست. □

مثال ۲۰۳. اگر x, y دو مجموعه باشند آنگاه $x - y$ یک مجموعه است.

$$x - y = \{z \in x | z \notin y\}$$

(اثبات به عهده‌ی شما) [۴۸]

مثال ۲۰۴. تهی یک مجموعه است. با فرض این که x یک مجموعه است، بنا به اصل تصریح،

$$\{z \in x | z \neq z\}$$

[۴۸] برای برخی سوال پیش آمد که y^c یعنی متمم مجموعه‌ی y چیست. برای یافتن پاسخ این سوال به جزوه‌ی مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید.

یک مجموعه است که به آن مجموعه‌ی تهی خواهیم گفت:

$$ZFC \vdash \exists t \forall z \quad z \in t \leftrightarrow z \in x \wedge z \neq z$$

برخی وجود مجموعه‌ی تهی را یک اصل می‌گیرند. اما در صورتی که ZFC سازگار باشد، حتماً یک مجموعه وجود دارد و بنا به مثال بالا و اصل تصریح، وجود مجموعه‌ی تهی نیز ثابت می‌شود.

قضیه ۲۰۵. از اصول ZFC نتیجه می شود که مجموعه همه مجموعه ها وجود ندارد. (به بیان دیگر، سیستم یا کلاس متشکل از همه مجموعه ها، مجموعه نیست.)

نخست دقت (و ثابت) کنید که اگر T یک تئوری باشد و $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \wedge \neg\psi$ آنگاه

$$T \vdash \neg\varphi.$$

اثبات. بنا به نکته‌ی بالا، نشان می‌دهیم که اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها با فرض وجود یک مجموعه‌ی شامل همه‌ی مجموعه‌ها ناسازگار است. پس فرض کنید $ZFC \cup \{\exists V \quad \forall x \quad x \in V\}$ سازگار باشد. آنگاه بنا به اصل تصریح

$$ZFC \vdash \exists t \forall z \quad (z \in t \leftrightarrow z \in V \wedge z \notin z)$$

به بیان غیر رسمی تر، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$t = \{z \in V | z \notin z\}$$

اما در این صورت خواهیم داشت:

$$t \in t \leftrightarrow \neg(t \in t).$$

پس این که سیستم متشکل از تمام مجموعه ها، مجموعه باشد، به همراه اصول ZFC تناقض آمیز است. پس نقیض این گفته از اصول ZFC نتیجه می‌شود. □

دقت کنید که V، یعنی کلاس همه‌ی مجموعه‌ها توسط یک فرمولْ قابل وصف است:

$$V = \{x | \forall y \quad y \in x\}$$

با این حال همان طور که ثابت کردیم V یک مجموعه نیست. نامی که برای چنین پدیده‌هایی انتخاب کرده‌ایم، **کلاس** است. در واقع هر عبارتی که در اصل شمول (در نظریه‌ی مجموعه‌های کانتور) توصیف شود، یک کلاس نام دارد. **اصل تصریح بیانگر این است که اشتراک یک کلاس با یک مجموعه، یک مجموعه است.**

اصل ۳ (اصل جفت سازی). بنا به این اصل، اگر x, y دو مجموعه باشند آنگاه $\{x, y\}$ یک مجموعه است؛ یعنی مجموعه‌ای

موجود است که تنها از x, y تشکیل شده است. در زیر بیان دقیق این اصل را نوشته‌ایم:

$$\forall x, y \exists t \forall z \quad (z \in t \leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

مجموعه‌ی t که وجودش در اصل بالا نوشته شده است، به صورت زیر است:

$$t = \{x, y\}.$$

از اصل جفت سازی (و با استقراء) نتیجه می شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$ اگر $y_۱, \ldots, y_n$ مجموعه باشد آنگاه $\{y_۱, \ldots, y_n\}$ مجموعه است.

تعریف ۲۰۶. فرض کنید x و y دو مجموعه باشند. زوج مرتب (x, y) به صورت زیر تعریف می‌شود: [۴۹]

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

لم ۲۰۷. اگر x و y مجموعه باشند، آنگاه (x, y) مجموعه است.

اثبات. اگر x و y مجموعه باشند، آنگاه بنا به اصل جفت‌سازی $\{x, x\}$ و $\{x, y\}$ مجموعه هستند. بنا به اصل گسترش $\{x\} = \{x, x\}$ پس $\{x\}$ و $\{x, y\}$ مجموعه هستند. بنا به اصل جفت‌سازی $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ نیز مجموعه است. $\square$

اثبات لم زیر را به عهده‌ی شما می‌گذارم.

لم ۲۰۸.

$$ZFC \vdash (x, y) = (x', y') \leftrightarrow x = y \wedge x' = y'$$

اصل ۴ (اصل اجتماع)**.** بنا به این اصل، اگر x یک مجموعه باشد آنگاه $\bigcup x$ یک مجموعه است. اصل اجتماع دقیقاً به صورت زیر است:

$$\forall x \exists z \forall y \quad (y \in z \leftrightarrow \exists t (t \in x \wedge y \in t))$$

در واقع مجموعه‌ی z در بالا، همان مجموعه‌ی $\bigcup x$ است.

مثال ۲۰۹.

$$x = \{\{۱, ۲\}, \{۳, ۴\}\}$$

$$\bigcup x = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

لم ۲۱۰. اگر x و y مجموعه باشند، آنگاه $x \cup y$ مجموعه است.

اثبات. بنا به اصل جفت‌سازی اگر x و y مجموعه باشند آنگاه $\{x, y\}$ مجموعه است. داریم (تحقیق کنید) $x \cup y = \bigcup \{x, y\}$. $\square$

[۴۹] زوج کوراتُفسکی

اصل ۵ (اصل توان)**.** اگر x مجموعه باشد آن‌گاه کلاس متشکل از تمام زیرمجموعه‌های x مجموعه است؛ یا مجموعه‌ای وجود دارد که هر عضو آن دقیقاً یک زیرمجموعه از x است. بیان رسمی این اصل به صورت زیر است:

$$\forall x \exists y \forall z \quad (z \in y \leftrightarrow \underbrace{\forall u(u \in z \to u \in x)}_{z \subseteq x})$$

اگر x مجموعه باشد، آنگاه مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های آن را با $\mathcal{P}(x)$ نشان می‌دهیم. **دقت کنید که در نظریه‌ی مجموعه‌ها، هر عضوِ یک مجموعه، مجموعه است (این را با اصل تصریح ثابت کنید!). بنابراین اگر x یک مجموعه باشد، هر عنصرِ متعلق به $\mathcal{P}(x)$ یک مجموعه است. پس هر زیرمجموعه از یک مجموعه، مجموعه است.**

تعریف ۲۱۱. اگر a و b مجموعه باشند آنگاه $a \times b = \{(x,y)|x \in a \wedge y \in b\}$ نیز مجموعه است. مجموعه‌ی $a \times b$ را حاصلضرب a, b می‌نامیم.

دقت کنید که

$$a \times b = \{\{\{x\},\{x,y\}\}|x \in a \wedge y \in b\}$$

یعنی

$$t \in a \times b \leftrightarrow \exists x \in a \exists y \in b \quad \underbrace{t = (x,y)}_{\text{قابل بیان}}$$

اثبات مجموعه بودنِ $a \times b$. بنا به اصل تصریح و اصل توان، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$\{u \in P(P(a \cup b))|\exists x \in a \exists y \in b \quad u = (x,y)\}$$

دقت کنید که عبارتِ $u = (x,y)$ (بنا به لمِ ۲۰۷) توسط یک فرمول در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها قابل نوشتن است؛ و این در واقع حق استفاده از اصل تصریح را به ما می‌دهد. $\square$

به طور مشابه $a \times b \times c$ و $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$ قابل تعریف هستند.

اگر a و b مجموعه باشند به هر زیرمجموعه از $a \times b$ یک رابطه‌ی دوموضعی از a به b گفته می‌شود. فرض کنید f از a به b یک رابطه باشد. f را تابع می خوانیم هر گاه

$$\forall x \in a \exists ! y \in b \quad (x,y) \in f$$

دقت کنید که اگر a, b مجموعه باشند آنگاه منظور از یک تابع از a به b را در بالا تعریف کردیم. حال فرض کنید فرمولِ $\phi(x,y)$ به صورتی باشد که

$$ZFC \vdash \forall x \exists ! y \quad \phi(x,y)$$

در این صورت، اصول ZFC ثابت می‌کنند که فرمولِ ϕ گراف یک تابع را مشخص می‌کند. ولی همان مشکلِ اصل شمول

دراینجا هم باقی است. آنچه توسط فرمولِ ϕ تعریف می‌شود، عبارت زیر است:

$$\{(x,y)|\phi(x,y)\}$$

گفتیم که این عبارت، لزوماً یک مجموعه نیست. پس آنچه توسط آن تعریف می‌شود، تابع نیست، ولی به علت شباهت آن به یک تابع، آن را یک **تابعال** [50] می‌نامیم. پس به طور خلاصه، اگر

$$ZFC \vdash \forall x \exists! y \quad \phi(x,y)$$

آنگاه عبارتِ

$$f = \{(x,y)|\phi(x,y)\}$$

یک تابعال است. در تعریف یک تابعال ممکن است پارامترهایی از جنس مجموعه نیز به کار رفته باشند. به بیان دقیقتر، اگر $a_1, \ldots a_n$ مجموعه باشند و $\phi(x,y,z_1,\ldots,z_n)$ یک فرمول در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها باشد، آنگاه هر عبارت به صورت زیر یک تابعال است:

$$\{(x,y)|\phi(x,y,a_1,\ldots,a_n)\}.$$

که آن را می‌توان با $f: V \to V$ نشان داد.

در زیر می‌خواهم به اصل جانشانی بپردازم. در کمتر کتابِ نظریه‌ی مجموعه‌ها، اصل جانشانی به دقتی که ما می‌خواهیم بیانش کنیم، بیان شده است. ما نیز این دقت را مرهون نیمی از ترم گذراندن درس منطق هستیم. [51]

اصل ۶ (اصل جانشانی)**.** اگر f یک تابعال باشد که توسط یک فرمول در نظریه مجموعه‌ها داده‌شده‌است و a یک مجموعه باشد، آنگاه $f[a] = \{f(x)|x \in a\}$ یک مجموعه است؛ به بیان دیگر، تصویرِ تحدیدِ یک تابعال به یک مجموعه، یک مجموعه است.

$$\forall z_1,\ldots,z_n \quad \forall a \quad \forall x \quad \exists! y \quad \varphi(x,y,z_1,\ldots,z_n) \to \exists t \quad \big(\forall z \quad z \in t \leftrightarrow \exists u \in A \quad \varphi(u,z,z_1,\ldots,z_n)\big)$$

در بالا عبارت زیر را نوشته‌ایم:

اگر فرمولِ $\phi(x,y,a_1,\ldots,a_n)$ گراف یک تابعال از V به V را بدهد و $a.$ یک مجموعه باشد، آنگاه تصویرِ $a.$ تحت این تابعال، یک مجموعه است. **به بیان فنی‌تر تصویر هر مجموعه، تحت یک تابع تعریف‌پذیر، مجموعه است.**

مثال ۲۱۲. بدون استفاده از اصل توان، نشان دهید که با فرض مجموعه بودنِ a,b عبارتِ $a \times b$ یک مجموعه است.

گفتیم که

$$a \times b = \left\{ \Big\{ \{x\}, \{x,y\} \Big\} | x \in a, y \in b \right\}$$

[50] در کلاس درس، حق استفاده از پسوند ال را توجیه کرده‌ام!

[51] در درس مبانی ریاضی نیز نتوانستم آن طور که باید و شاید بدین اصل بپردازم.

فرض کنید $x \in b$ یک مجموعه باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که عبارت زیر یک مجموعه است:

$$a \times \{x\} = \{(t, x) | t \in a\}$$

دقت کنید که عبارت زیر در ZFC قابل اثبات است:

$$\forall z \quad \exists! u \quad u = (z, x)$$

پس تابعال زیر قابل تعریف است:

$$f : V \to V$$

$$f : z \mapsto (z, x)$$

حال تصویر مجموعه‌ی a تحت این تابعال، بنا به اصل جانشانی، یک مجموعه است:

$$f[a] = \{(z, x) | z \in a\} = a \times \{x\}$$

می‌دانیم که

$$a \times b = \bigcup_{x \in b} (a \times \{x\})$$

پس اگر

$$\{a \times \{x\} | x \in b\}$$

یک مجموعه باشد، بنا به اصل اجتماع و عبارت بالا، $a \times b$ نیز یک مجموعه خواهد بود و حکم مورد نظر ما اثبات خواهد شد.
دوباره دقت کنید که

$$\forall x \quad \exists! u \quad u = a \times \{x\}$$

عبارت بالا را می‌توان دقیقاً توسط یک فرمول مرتبه‌ی اول نوشت. پس

$$g : V \to V$$

$$x \overset{g}{\mapsto} a \times \{x\}$$

یک تابعال است. بنا به اصل جانشانی، عبارت زیر یک مجموعه است:

$$g[b] = \{a \times \{x\} | x \in b\}$$

پس همانگونه که گفتیم بنا به اصل اجتماع، $\bigcup g[b]$ یک مجموعه است و به راحتی قابل تحقیق است که

$$\bigcup g[b] = \{(x,y)|x \in a, y \in b\} = a \times b.$$

در نظریه‌ی مجموعه‌ها بسیار پیش می‌آید که از عبارتهای $x \cup y, x \cap y, x - y, x \subseteq y$ استفاده می‌کنیم. در درس منطق آموختیم که تنها حق نوشتن چیزهایی را داریم که در زبانْ علائم مربوط بدانها را داشته باشیم. مثلا اگر می‌خواهیم بنویسیم $x \cap y$ باید یک نماد تابعی در زبانْ داشته باشیم که تعبیر آن تابعی باشد که x, y را بگیرد و $x \cap y$ را بدهد. اما از طرفی نیز می‌دانیم که می‌توان، هر جا که لازم شد، به جای نوشتنِ $x \cap y$ با استفاده از اصل تصریح از مجموعه‌ای استفاده کرد که وجود دارد و نقش $x \cap y$ را بازی می‌کند و برای بیان وجودش فقط از نمادهای زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها استفاده شده است. پس استفاده از نمادِ $x \cap y$ نباید لطمه‌ای به نظریه‌ی مجموعه‌ها وارد کند (مثلاً نباید موجب ناسازگاری آن، یا بروز مجموعه‌های جدید شود). در زیر این گفته‌ها را دقیق کرده‌ایم.

فرض کنید T یک تئوری دلخواه در زبان $\mathcal{L}$ و φ یک $\mathcal{L}$فرمول باشد. و فرض کنید که

$$T \vdash \forall x \quad \exists! y \quad \varphi(x,y)$$

به زبان $\mathcal{L}$ یک نماد تابعی f اضافه کنید.

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{f\}$$

نیز قرار دهید:

$$T' = T \cup \{\forall x \quad \varphi(x, f(x))\}$$

آنگاه

۱. اگر φ یک $\mathcal{L}$جمله باشد و $T' \vdash \varphi$ آنگاه $T \vdash \varphi$.

۲. برای هر $\mathcal{L}'$فرمولِ ψ' یک $\mathcal{L}$فرمولِ ψ موجود است به طوری که

$$T' \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$$

بنا به دو نکته‌ی بالا، T' تفاوت زیادی با T ندارد. می‌گوییم T' یک توسیع تعریف‌پذیر از T است. (در صورتی که تعریف بالا به روابط و ثوابت نیز گسترش داده شود).

بنا به آنچه گفته شد می‌توان فرض کرد که در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها توابع زیر، و بسیاری توابع و روابط تعریف‌پذیر دیگر

موجودند:

$$\begin{aligned}(x,y) \mapsto & x\cap y\\ & x\cup y\\ & x-y\\ & \{x,y\}\\ & x\times y\end{aligned}$$

توجه ۲۱۳. در اصل تصریح و جانشانی نیز می‌توان فرمول φ را شامل این توابع جدید فرض کرد.

در ادامه به یکی از سخت‌ترین (در فهم و تدریس!) اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها، به نام **اصل انتظام** [52] خواهیم پرداخت. پیش از آن دقت کنید که عبارات زیر مجموعه هستند:

$$\begin{aligned}&\emptyset\\ &\{\emptyset\}\\ &\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\\ &\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\end{aligned}$$

این مجموعه‌ها با استفاده از مجموعه‌ی تهی و چندین بار استفاده از اصل جفت‌سازی به دست آمده‌اند. **مطلوب ما این است «همه‌ی مجموعه‌ها اینچنین خوش‌بنیاد باشند».**

تعریف ۲۱۴. مجموعه‌ی x را خوش بنیاد می‌نامیم هرگاه هر دنباله‌ی مانند زیر، پس از متناهی مرحله متوقف شود.

$$x \ni x_۰ \ni x_۱ \ni x_۲ \ni \dots$$

در واقع عبارتی به صورت زیر، خوش‌بنیاد نیست:

$$\left\{\left\{\{\{\dots\}\}\right\}\right\}$$

اصل خوش‌بنیادی برای بیان این است که همه‌ی مجموعه‌ها خوش‌بنیاد هستند. اما این را باید بتوان به صورت یک اصل مرتبه‌ی اول نوشت که توان بیان این خواسته را داشته باشد.

اصل ۷ (اصل انتظام).

$$\forall x \quad \exists z\in x \quad z\cap x=\emptyset$$

[52] Fundierungaxiom,axiom of Regularity, axiom of well-foundedness

صورت اصل بالا بیان می‌کند که اگر وارد یک مجموعه بشویم، و پس از وارد عضوی از آن مجموعه بشویم، و سپس وارد عضوی از آن عضو بشویم، نهایتاً به تهی می‌رسیم. برای مثال اگر

$$z = \Big\{\{۱, ۲\}, ۲\Big\} \qquad x = \left\{\Big\{\{۱, ۲\}, ۲\Big\}, \Big\{۱, ۲\Big\}\right\}$$

آنگاه

$$x \in z \qquad x \cap z = \{۱, ۲\} := y \qquad y \cap x = \emptyset$$

دوباره، آن هم به لطف منطق، می‌توانیم درباره‌ی توانائی اصل بالا برای بیان خوش‌بنیادی بحث کنیم:

اگر اصل انتظام نادرست باشد آن‌گاه مجموعه‌ی x موجود است به طوری که

$$(*) \quad \forall z \in x \quad z \cap x \neq \emptyset$$

فرض کنید که $x_۰ \in z \cap x$. از آنجا که $x_۰ \in x$ دوباره بنا به عبارتِ $(*)$ مجموعه‌ی $x_۱ \in x_۰ \cap x$ یافت می‌شود. پس

$$x \ni x_۰ \ni x_۱$$

به این ترتیب (بنا به اصل انتخاب که در جلسه‌ی بعدی بدان خواهیم پرداخت) یک دنباله به صورت زیر یافت می‌شود:

$$x_۰ \ni x_۱ \ni x_۲ \ni x_۳ \ni \dots$$

بنابراین نادرست بودن اصل انتظام، منجر به وجود یک مجموعه‌ی غیرخوش‌بنیاد می‌شود.

حال درباره‌ی برعکس آن صحبت می‌کنیم. فرض کنید که x غیر خوش‌بنیاد باشد.

$$x \ni x_۰ \ni x_۱ \ni \dots$$

می‌خواهیم ببینیم که آیا این اصل انتظام را نقض می‌کند. قرار دهید

$$A = \{x_۰, x_۱, x_۲\}$$

دقت کنید که A (که نمی‌دانیم مجموعه است یا خیر) در اصل انتظام صدق نمی‌کند. زیرا اگر $x \in A$ آنگاه t به صورت x_n است. واضح است که $x_{n+۱} \in t \cap A$. پس اصل انتظام، در واقع به این خواسته‌ی ما که مجموعه‌ای غیرخوش‌بنیاد وجود نداشته باشد نزدیک است. ولی فراموش نکنیم که دلیلی نداشتیم فرض کنیم که A در بالا مجموعه است. برای این که گیج تر شوید (!) تمرین زیر را در نظر بگیرید:

تمرین ۲۱۵. با استفاده از فشردگی، نشان دهید که اگر ZFC سازگار باشد، مدلی دارد که در آن مجموعه‌ای غیرخوش‌بنیاد وجود دارد.

حل تمرین بالا آسان است. در واقع از آنجا که دنباله‌های نزولیِ به اندازه‌ی کافی بزرگ در هر مدل استاندارد از زدافسی پیدا می‌شوند، مدلی غیر استاندارد موجود است که در آن دنباله‌ای نزولی و نامتناهی یافت شود.

پس اصل انتظام، آنقدرهاهم در بیان خوش‌بنیادی موفق نبوده است. با این حال از اصل انتظام نتیجه می‌شود که

نتیجه ۲۱۶ (از اصل انتظام). اگر $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$ آنگاه هیچ تابعِ تعریف‌پذیرِ f با دامنه‌ی $\mathbb{N}$ وجود ندارد به طوری‌که $f(i) = x_i$. (در غیر این‌صورت بنا به اصل جانشانی تصویر این تابع، یک مجموعه می‌شود که آن مجموعه، در اصل انتظام صدق نمی‌کند).

مثال ۲۱۷. همچنین از اصل انتظام نتیجه می‌شود که

۱.

$$\forall x \quad \neg(x \in x)$$

زیرا اگر $x \in x$ آنگاه

$$\exists z \in x \quad z \cap x \neq \emptyset.$$

۲. کلاس همه‌ی مجموعه‌ها مجموعه نیست. زیرا اگر مجموعه باشد، باید شامل خودش باشد و این بنا به مورد قبلی ناممکن است.

با همه‌ی این تفاسیر، ما فرض می‌کنیم که همه‌ی مجموعه‌ها خوش‌بنیاد هستند. علت این فرض این است که اگر $\mathfrak{M} \models ZFC$ آنگاه

$$\{M \in \mathfrak{M} | \text{خوش بنیاد است.} M\} \models ZFC$$

به بیان دیگر، اگر $\mathfrak{M}$ مدلی برای نظریه‌ی مجموعه‌ها [53] باشد، مجموعه‌هایی که در آن خوش‌بنیاد هستند، خودْ مدلی برای نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌سازند. در این مدل، اصل انتظام برقرار است و همه‌ی مجموعه‌ها خوش‌بنیاد هستند.

گاهی دلیل فلسفی زیر را برای عدم توفیق اصل انتظام در بیان خوش‌بنیادی می‌آورند: اگر M یک مدل از نظریه‌ی مجموعه‌ها باشد، خودِ این مدل فکر می‌کند که در مجموعه‌هایش زنجیرهای نامتناهی نزولی وجود ندارند و هر زنجیری قرار است به زودی متوقف شود؛ ولی ناظرِ بیرون این مدل، می‌بیند که زنجیری هست که تا ابد ادامه دارد. مشابه چنین توجیه‌هایی را برای پارادوکس اسکولم می‌آورند که در ادامه اندکی درباره‌ی آن سخن گفته‌ایم.

خواهیم دید که

$$ZFC \vdash \text{یک مجموعه‌ی ناشمارا وجود دارد.}$$

حال می‌دانیم که اگر ZFC سازگار باشد، دارای مدل است. بنا به لم لونهایم اسکولم در این صورت ZFC دارای مدلی شماراست. در این مدل، مجموعه‌ای ناشمارا وجود دارد! دقت کنید که اعضای آن مجموعه، خودْ مجموعه هستند پس در واقع در این مدل شمارا، ناشمارا مجموعه وجود دارند! این را تناقض اسکولم می‌خوانند و در توجیه آن چنین دلیلی می‌آورند: مدلِ شمارای ZFC فکر می‌کند که عضوی بسیار بزرگ (ناشمارا) دارد؛ ولی از بیرون، اعضای این مدل چندان بزرگ به نظر نمی‌رسند!

تمرین ۲۱۸. نشان دهید که اصل جفت‌سازی از اصول جانشانی، توان و وجود مجموعه‌ی تهی نتیجه می‌شود.

[53] حتی نظریه‌ی مجموعه‌ها بدون اصل انتظام

۲۱.۰ جلسه‌ی بیست وسوم

دو اصل دیگر از نظریه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها مانده است که در این جلسه، آنها را اجمالاً معرفی می‌کنم و در جلسات بعدی درباره‌ی آنها بیشتر صحبت خواهم کرد.

اصل ۸ (وجود مجموعه‌ی نامتناهی)**.** این اصل بیانگر این است که مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد. بیان رسمی این اصل به صورت زیر است:

$$\exists z \quad (\emptyset \in z \wedge \forall x \in z \quad x \cup \{x\} \in z)$$

پس مجموعه‌ای که در اصل بالا وصف شده است، شامل همه‌ی مجموعه‌های زیر است:

$$\emptyset$$

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\vdots$$

اصل ۹ (اصل انتخاب)**.** بنا به اصل انتخاب، اگر مجموعه‌ای متشکل از مجموعه‌های ناتهی داشته باشیم، تابعی (به نام تابع انتخاب) وجود دارد که از هر یک از اعضای این مجموعه عضوی برمی‌دارد. بیان رسمی این اصل به صورت زیر است:

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \quad \exists f : x \rightarrow \bigcup x \quad \forall t \in x \;\; f(t) \in t)$$

دقت کنید که اعضای x هر کدام یک مجموعه هستند و تابع f در بالا از هر کدام از مجموعه‌های موجود در x عنصری برمی‌دارد.

دقت کنید که این که تابعی مانند f موجود است، قابل بیان در منطق مرتبه‌ی اول است. برای بیان آن باید گفت که یک زیرمجموعه از $x \times \bigcup x$ موجود است که ویژگی تابع بودن را داراست.

در جلسات آینده درباره‌ی اصل انتخاب و صورتهای معادل آن بیشتر توضیح خواهم داد. در ادامه‌ی این جلسه، به اعداد طبیعی خواهیم پرداخت. پیش از آن به دانشجویان پیشنهاد می‌کنم که برای فهم دقیقترِ اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها، حتماً تمرین زیر را حل کنند.

تمرین ۲۱۹. فرض کنید $\mathcal{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های متناهیِ اعداد طبیعی باشد. این مجموعه، همان طور که از درس مبانی ریاضی می‌دانید، شماراست، پس در تناظر یک‌به‌یک با $\mathbb{N}$ است. فرض کنید β یک تناظر یک‌به‌یک بین $\mathbb{N}$ و $\mathcal{P}_{<\omega}(\mathbb{N})$ باشد. روی $\mathbb{N}$ رابطه‌ی $\in_\beta$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$x \in_\beta y \Leftrightarrow x \in \beta(y).$$

حال ساختارِ $(\mathbb{N}, \in_\beta)$ را در نظر بگیرید و به تمرینهای زیر درباره‌ی آن جواب دهید.

۱. کدام اصولِ زدافسی در این ساختار درست هستند؟

۲. نشان دهید که اگر β را نگاشت زیر در نظر بگیریم، آنگاه هر مجموعه در $(\mathbb{N}, \in_\beta)$ خوش‌بنیاد است.

$$\beta(۲^{n_۱} + \dots ۲^{n_k}) = \{n_۱, \dots, n_k\}.$$

۳. β را به گونه‌ای تعریف کنید که در $(\mathbb{N}, \in_\beta)$ اصل انتظام درست **نباشد.**

۴. β را به گونه‌ای تعریف کنید که در $(\mathbb{N}, \in_\beta)$ اصل انتظام درست باشد، ولی درعین حال یک مجموعه‌ی غیرخوش‌بنیاد پیدا شود.

۱.۲۱.۰ اعداد طبیعی

اعداد طبیعی را همه می‌شناسند:

$$\mathbb{N} = \{۰, ۱, \dots\}.$$

این را نیز همه می‌دانند که اگر حکمی برای ۰ درست باشد و از درست بودن آن برای n درستی آن برای $n + ۱$ نتیجه شود، آنگاه این حکم برای «تک‌تک‌اعدادِطبیعی» درست است. اما آنچه در ادامه بدان پرداخته‌ایم این است که ZFC درباره‌ی اعداد طبیعی چه فکر می‌کند. به بیان دیگر می‌خواهیم بدانیم که حقایق مربوط به اعداد حقیقی تا چه حدی در نظریه‌ی مجموعه‌ها قابل بیان و اثبات هستند. نخست چند مجموعه‌ی ساده معرفی می‌کنیم:

$$\underline{۰} = \emptyset$$

$$\underline{۱} = \{\underline{۰}\} = \{\emptyset\}$$

$$\underline{۲} = \{\underline{۰}, \underline{۱}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\underline{۳} = \{\underline{۰}, \underline{۱}, \underline{۲}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\vdots$$

$$\underline{n} = \dots$$

در ادامه‌ی درس مفهوم اعداد طبیعی را به طور دقیق تعریف کرده‌ایم.

تعریف ۲۲۰. مجموعه x را **متعدی** می‌نامیم هرگاه

$$\forall y, z \quad y \in z \in x \to y \in x$$

به بیان دیگر x متعدی است اگروتنهااگر $\bigcup x \subseteq x$. (این را ثابت کنید).

تعریف ۲۲۱. فرض کنید a یک مجموعه و $<$ یک رابطه روی a باشند. (یعنی $<$ یک زیر مجموعه از $a \times a$ باشد.) می گوییم $<$ یک رابطه ترتیبی روی a است هرگاه دو مورد زیر برقرار باشند:

۱. $\forall x \in a \quad \neg(x < x)$.

۲. $\forall x, y, z \in a \quad (x < y) \wedge (y < z) \rightarrow x < z$.

همچنین می‌گوییم رابطه $>$ یک رابطه ترتیبی خطی است هرگاه علاوه بر دو مورد بالا، مورد زیر نیز برقرار باشد:

۳. $\forall x, y \in a \ (x < y \vee y < x \vee x = y)$.

حال همه‌ی مواد لازم برای تعریف اعداد طبیعی را در دست داریم. در نظریه‌ی مجموعه‌ها، گاهی خودِ رابطه‌ی عضویت، رابطه‌ی ترتیبی می‌شود که این اساس تعریف اعداد طبیعی، و پس از آن اردینالهاست.

تعریف ۲۲۲. مجموعه x را یک عدد طبیعی می‌نامیم هرگاه سه مورد زیر برقرار باشند:

۱. x متعدی باشد.

۲. $(x, \in)$ یک مجموعه **مرتب خطی** باشد.

۳. هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از x با ترتیبِ $\in$ دارای یک عنصر مینیمم و یک عنصر ماکسیمم باشد.

توجه کنید که این که x متعدی باشد، با این که رابطه‌ی $\in$ روی x متعدی باشد، دو مطلب متفاوت هستند. اولی یعنی اعضایِ اعضای x عضوِ x باشند. ولی دومی یعنی بین سه عضوِ $t_1, t_2, t_3 \in x$ رابطه‌ی تعدی برقرار باشد؛ و هیچکدام از اینها از دیگری نتیجه نمی‌شود.

در تعریف بالا نیازی نبود که بگوییم هر زیرمجموعه از x دارای مینی‌موم باشد؛ زیرا این از اصل انتظام نتیجه می‌شود. فرض کنید $y \subseteq x$ دارای مینی‌موم نباشد. پس عنصر $x_0 \in y$ برابر با مینی‌مومِ y نیست. پس عنصرِ $x_1 \in x_0$ و به همین ترتیب یک دنباله‌ی

$$x_0 \ni x_1 \ni \dots$$

یافت می‌شود. حال دقت کنید که از $x_0 \ni x_1 \ni x_2$ بنا به متعدی بودن رابطه‌ی $\in$ نتیجه می‌شود که $x_2 \in x_0$. پس همه‌ی x_iها برای $i \geq 1$ اعضای x_0 هستند. یعنی $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ یک زیرمجموعه از x_0 است، پس یک مجموعه است. اما این با اصل انتظام مغایر است. زیرا برای هر $x_i \in A$ داریم $x_{i+1} \in A \cap x_i$. [54]

لم ۲۲۳. در ZFC ثابت می شود که عناصر متعلق به یک عدد طبیعی، عدد طبیعی هستند.

اثبات. فرض کنید x یک عدد طبیعی باشد و $y \in x$. اولاً y متعدی است؛ زیرا رابطه‌ی تعلق روی x متعدی است:

$$z \in u \in y \rightarrow z \in y.$$

این که $\in$ روی y رابطه ترتیبی است به آسانی قابل اثبات است. این که هر زیر مجموعه ای از y دارای مینیمم و ماکسیمم است نیز به آسانی ثابت می شود، زیرا هر زیر مجموعه از y یک زیر مجموعه از x است. $\square$

[54] این مسئله‌ی مهمی است. در جلسه‌ی قبل گفتم که اصل انتظام لزوماً خوش‌بنیادی را نتیجه نمی‌دهد، ولی از مجموعه‌ی شدنِ یک گردایه‌ی $x_0 \ni x_1 \ni \dots$ جلوگیری می‌کند. با وجود تعدی، هر دنباله‌ی نزولیِ به صورت یادشده، تشکیل یک مجموعه می‌دهد. پس با وجود تعدی، اصل انتظام، خوش‌بنیادی را نتیجه می‌دهد.

تمرین ۲۲۴. نشان دهید که در ZFC هر $\underline{n}$، تعریف‌شده در بالا، یک عدد طبیعی است. این را می‌توانید با استقراء روی اعداد طبیعی نشان دهید. این استفاده از استقراء اشکالی ندارد، در واقع شما در خارج از ZFC از استقراء استفاده کرده‌اید. یعنی نشان داده‌اید که اگر از نظر زدافسی $\underline{n}$ یک عدد طبیعی باشد، آنگاه از نظر زدافسی، $\underline{n+۱}$ نیز یک عدد طبیعی است. در ادامه‌ی درس، یک مفهوم برای استقراء را در **خودِ زدافسی** فرمولبندی خواهیم کرد.

تعریف ۲۲۵. اگر x یک مجموعه باشد، تعریف می‌کنیم:

$$s(x) = x \cup \{x\}$$

لم ۲۲۶. در ZFC ثابت می شود که اگر x یک عدد طبیعی باشد آنگاه $S(x)$ نیز یک عدد طبیعی است.

اثبات. در اینجا فقط تعدی را ثابت می‌کنم و بررسی سایر ویژگی‌ها را به عهده‌ی شما می‌گذارم. اگر $y \in z \in x \cup \{x\}$ آنگاه یا $z \in x$ یا $z = x$. در حالت اول از تعدی x نتیجه می‌شود که $y \in x$ پس $y \in x \cup \{x\}$. در حالت دوم هم مشخص است که $y \in z = x$. پس $y \in x \cup \{x\}$. □

لم ۲۲۷. اگر $x \neq \emptyset$ و x یک عدد طبیعی باشد آنگاه یک عدد طبیعی y موجود است به طوریکه $x = y \cup \{y\} = S(y)$؛ به بیان دیگر، هر عدد طبیعیِ ناصفر، تالی یک عدد طبیعی دیگر است.

اثبات. فرض کنید y بزرگترین عنصر متعلق به x باشد که طبق تعریف عدد طبیعی، چنین عنصری موجود است (زیرا $x \subseteq x$ و هر زیرمجموعه از x دارای ماکزیمم است). ادعا می کنیم که $x = y \cup \{y\}$. این که $y \cup \{y\} \subseteq x$ به راحتی ثابت می‌شود. برای اثبات این که $x \subseteq y \cup \{y\}$، دقت کنید که اگر $t \in x$ و $t \notin y$ آنگاه از آنجا که $\in$ روی x یک رابطه ترتیب خطی است یا $y \in t$ یا $y = t$. دقت کنید که این که $y \in t$ با ماکزیمم بودن y در تناقض است. □

تعریف ۲۲۸. کلاس متشکل از تمام اعداد طبیعی را با ω نشان می‌دهیم.

قضیه ۲۲۹. ω یک مجموعه است.

اثبات. نخست دقت کنید که **عدد طبیعی بودن** قابل وصف توسط فرمولهای مرتبه اول در زبان نظریه مجموعه‌هاست. یعنی یک فرمولِ ϕ وجود دارد، به طوری که $\phi(x)$ یعنی x یک عدد طبیعی است. بنا به اصل تصریح، کافی است نشان دهیم که یک مجموعه‌ی t وجود دارد به طوری که $\omega = \{x \in t | \phi(x)\}$. **به بیان دیگر، برای اثباتِ مجموعه بودنِ ω کافی است نشان دهیم که یک مجموعه‌ی t موجود است که ω زیرمجموعه‌ای از آن است.**

اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی را در نظر بگیرید:

$$\exists t (\emptyset \in t) \wedge (\forall u \in t \;\; u \cup \{u\} \in t)$$

بنا به این اصل، یک مجموعه‌ی نامتناهیِ t موجود است. در ادامه نشان خواهیم داد که $\omega \subseteq t$. در واقع با اثبات این گفته ثابت کرده ایم که ω زیر مجموعه تمام مجموعه های استقرایی است (مجموعه‌هایی که شامل تهی هستند و هر x را که شامل باشند، مجموعه‌ی $x \cup \{x\}$ را نیز شاملند).

فرض کنید $\omega \not\subseteq t$. پس فرض کنید $x \in \omega - t$. در این صورت، $s(x) \in \omega$. دقت کنید که $x \in s(x)$ و $x \notin t$. حال فرض کنید که z کوچکترین عنصر در $s(x)$ باشد که $z \notin t$؛ به بیان دیگر $z = \min(s(x) - t)$.

همچنین دقت کنید که $\emptyset \neq z$ زیرا $(\emptyset \in t)$. از آن جا که z یک عدد طبیعی است و $z \neq \emptyset$، یک عدد طبیعی y موجود است به طوریکه $z = s(y) = y \cup \{y\}$. پس $y \in z \in s(x)$. اما این تناقض است، زیرا $y \in s(x) - t$ و $y \in z$ ولی z مینی‌موم $s(x) - t$ است.

علت این که $y \notin t$ این است که اگر $y \in t$ آنگاه از آنجا که t در اصل مجموعه‌ی نامتناهی بودن صدق می‌کند، $s(y) \in t$. اما $s(y) = z \notin t$. □

همان طور که گفته شد، در اثبات قضیه‌ی بالا، همچنین ثابت کردیم که ω زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی استقرائی است. اما یک نکته‌ی مهم دیگر نیز درخلال اثبات بالا، ثابت شد:

قضیه ۲۳۰ (استقراء).

$$ZFC \vdash (x \subseteq \omega \wedge \emptyset \in x \wedge \forall z \in x \;\; s(z) \in x) \to \omega = x.$$

اثبات. از آنجا که x یک مجموعه‌ی استقرائی است، بنا به اثبات قضیه‌ی قبل داریم $\omega \subseteq x$. حال از آنجا که $x \subseteq \omega$ از این نتیجه می‌شود که $x = \omega$. □

یک سوال طبیعی که در اینجا پیش می‌آید این است که آیا

$$\omega = \{\underline{۰}, \underline{۱}, \underline{۲}, \ldots, \}?$$

دقت کنید که مجموعه‌ی دست راست زیرمجموعه‌ی ω است. پس اگر استقرائی باشد، باید با ω برابر باشد. هر چند با نگاه از بیرون، به نظر می‌رسد که این مجموعه، استقرائی است (هر چه در آن است، بعدیش نیز در آن است) اما در ZFC نمی‌توان ثابت کرد که این مجموعه، استقرائی است. در واقع در ZFC نمی‌توان ثابت کرد که مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای آن دقیقاً $\{\underline{۰}, \underline{۱}, \ldots\}$ هستند. این گفته در تمرین زیر روشنتر می‌شود.

تمرین ۲۳۱. نشان دهید که اگر ZFC سازگار باشد آنگاه ZFC مدلی دارد که در آن اعداد طبیعی غیر استاندارد پیدا می شوند، یعنی یک مدل $\mathfrak{M} \models ZFC$ وجود دارد به طوری که عنصرِ $t \in M$ موجود است، به طوری که $t \in \omega^{\mathfrak{M}}$ ولی برای هر n داریم $t \neq \underline{n}$.

۲۲.۰ جلسه‌های بیست‌وچهار، بیست‌وپنج و بیست‌وشش

در جلسه‌ی قبل با تعریف یک عدد طبیعی آشنا شدیم. همچنین نشان دادیم که ω، کلاس همه‌ی اعداد طبیعی، قابل تعریف در زبان نظریه‌ی مجموعه‌هاست و از آنجا که زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی استقرائی است، بنا به اصل تصریح یک مجموعه است. گفتیم که در داخل یک عدد طبیعی، رابطه‌ی $\in$ یک ترتیب خطی است. در لم زیر بیان کرده‌ایم که رابطه‌ی تعلق، بین اعداد طبیعی نیز یک ترتیب تعریف می‌کند.

لم ۲۳۲. $(\omega, \in)$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب است. (یعنی $\in$ روی ω یک ترتیب خطی است و هر زیر مجموعه از ω با این ترتیب، دارای یک عنصر مینی‌موم است).

اثبات. اثباتِ‌ترتیبی بودن رابطه‌ی $\in$ نسبتاً آسان است و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنم. در زیر نخست نشان می‌دهیم که ترتیب مورد نظر خطی است؛ یعنی هر دو عدد طبیعی با این ترتیب با هم قابل مقایسه هستند.

فرض کنید $x, y \in \omega$. ادعا می‌کنیم که یا $x \in y$ یا $y \in x$ یا $x = y$.

ادعا ۱. یا $x \cap y = x$ یا $x \cap y \in x$؛ و مشابهاً یا $x \cap y = y$ یا $x \cap y \in y$.

توجه ۲۳۳. دو اتفاقِ $x \cap y \in y$ و $x \cap y \in x$ همزمان نمی‌توانند رخ دهند. زیرا اگر با هم رخ دهند داریم:

$$x \cap y \in x \cap y$$

و این ناقض اصل انتظام است. همچنین اگر حالتِ $x \cap y = x$ و $x \cap y = y$ رخ دهد آنگاه $y \subseteq x$ و $x \subseteq y$ و از این رو $x = y$. اگر $x \cap y = x$ و $x \cap y \in y$ آنگاه $x \in y$ و حکم ثابت می‌شود. مشابهاً اگر $x \cap y = y$ و $x \cap y \in x$ آنگاه $y \in x$. پس تنها کافی است که ادعای بالا ثابت شود.

فرض کنید $x \cap y \neq x$. قرار دهید

$$t = \min(x - x \cap y).$$

مجموعه‌ی t در بالا موجود است، زیرا x یک عدد طبیعی است و هر زیرمجموعه از آن دارای یک مینی‌موم است. ادعا می‌کنیم که $t = x \cap y$.

باید ثابت کنیم که

$$\text{①} \quad t \subseteq x \cap y$$

$$\text{②} \quad x \cap y \subseteq t$$

اثبات مورد اول. فرض کنید $u \in t$. از آنجا که $t \in x$ و x متعدی است داریم $u \in x$. باید ثابت کنیم که $u \in y$. اگر $u \notin y$ آنگاه $u \in x - x \cap y$. پس، از آنجا که $t = \min x - x \cap y$ داریم $t \in u$. پس $t \in u \in t$؛ که این بنا به تعدی عناصر موجود در x، اصل انتظام را نقض می‌کند.

اثبات مورد دوم. اگر $u \in x \cap y$ و $u \notin t$ آنگاه $t \in u$ یا $t = u$. پس $t \in x \cap y$ و این متناقضِ $t = \min x - x \cap y$ است.

اثباتِ‌خطی بودن ترتیب تعلق روی ω در این جا به پایان می‌رسد. در ادامه ثابت کرده‌ایم که هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از ω با این رابطه ($\in$) داری کوچکترین عنصر است.

فرض کنید $y \subseteq \omega$، و فرض کنید $x_0 \in y$ (x_0 یک عدد طبیعی است). اگر y مینی‌موم نداشته باشد عنصر $x_1 \in x_0$ موجود است. بنابراین (بنا به اصل انتخاب و بنا به قضیه‌ی بازگشت که در ادامه آمده است) دنباله‌ی

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$$

قابل تعریف است. توجه کنید که می‌توان در زدافسی ثابت کرد که $\{x_1, x_2, \dots\} \subseteq x_0$؛ و این مخالف خوش‌بنیادی x_0 است.(به بیان دقیق‌تر، مخالف اصل انتظام است.) $\square$

توجه کنید که ω خودش عدد طبیعی نیست؛ زیرا در غیر این صورت داریم $\omega \in \omega$ و این اصل انتظام را نقض می‌کند.

قضیه‌ی زیر، موسوم به قضیه‌ی بازگشت [55] است.

قضیه ۲۳۴ (بازگشت)**.** فرض کنید

$$g : A \to B$$

و

$$h : A \times \omega \times B \to B$$

دو تابع باشند. آنگاه یک تابع

$$f : A \times \omega \to B$$

موجود است به طوری که برای هر $a \in A$ نگاشتِ f به صورت زیر عمل می‌کند:

$$(a, ۰) \mapsto g(a)$$

$$\big(a, \underset{n+۱}{S(n)}\big) \mapsto h\big(a, n, f(a,n)\big)$$

اثبات. برای هر $a \in A$ و هر $n \in \omega$ $(\{x \in \omega | x < n\})$ یک **تابع یکتا** به صورت

$$f_a : \{a\} \times n \mapsto B$$

موجود است که ویژگی‌های یاد شده را داراست.(با استقراء ثابت کنید.) [56] حال تابع

$$f_{A_n} : A \times n = \bigcup f_a$$

را در نظر بگیرید. قرار دهید [57]

$$f = \bigcup f_{A_n}.$$

□

بسیاری تعاریف استقرائی روی ω با مجوزِ قضیه‌ی بازگشت رخ می‌دهند. برای مثال، توابع جمع و ضرب روی ω به صورت

[55] recursion

[56] دقت کنید که همه‌چیز در این جا قابل بیان در زبان مرتبه‌ی اول است.

[57] مشابه این قضیه را در درسهای آینده برای اردینالها ثابت خواهم کرد. علت این که این اثبات را خلاصه‌تر گفته‌ام نیز همین است.

بازگشتی زیر (با استفاده از تابعِ تالی)تعریف می‌شوند.

$$+ : \omega \times \omega \to \omega$$
$$m + ۰ = m$$
$$m + s(n) = s(m + n)$$

$$\cdot : \omega \times \omega \to \omega$$
$$m \cdot ۰ = ۰$$
$$m \cdot S(n) = m \cdot n + m$$

دقت کنید که برای تعریفِ ضرب، قضیه‌ی بازگشت را با تابع جمع و تابع تالی به کار برده‌ایم.

تا اینجا با مفهوم عدد طبیعی و وجود مجموعه‌ی اعداد طبیعی آشنا شدیم. گفتیم که اعداد طبیعی ما، تنها مجموعه‌ی $\{۰, ۱, \ldots\}$ را شامل نمی‌شود و در برخی مدلهای زداف‌اسی اشیای دیگری نیز وجود دارند که اعداد طبیعی هستند (و گفتیم که به آنها اعداد طبیعی نااستاندارد گفته می‌شود). [۵۸] دقت کنید که در تعریف اعداد طبیعی، رابطه‌ی تعلق نقشی اساسی بازی می‌کند. ترتیب روی اعداد طبیعی همان رابطه‌ی تعلق است و مجموعه‌ی اعداد طبیعی، با این ترتیب، خوش‌ترتیب است. در ادامه‌ی خواهیم دید، که در زداف‌سی اعداد ترتیبی دیگری نیز وجود دارند که به آنها «اُردینال» گفته می‌شود. خواهیم دید که نه تنها هر عدد طبیعی یک اردینال است، بلکه مجموعه‌ی اعداد طبیعی نیز، که خود با رابطه‌ی ترتیب مرتب می‌شود، یک اردینال است.

۲۳.۰ اُردینالها

تعریف ۲۳۵. مجموعه‌ی x را یک اردینال (یا یک عدد ترتیبی) [۵۹] می‌نامیم هرگاه

۱. $(x, \in)$ متعدی باشد؛ یعنی

$$z \in y \in x \to z \in x$$

یا به بیان دیگر

$$\bigcup x \subseteq x.$$

۲. $(x, \in)$ یک مجموعه‌ی مرتب خطی باشد؛ یعنی

$$\forall y \in x \quad \neg(y \in y)$$

[۵۸] به همین دلیل ما از نمادِ $\mathbb{N}$ برای اعداد طبیعی استفاده نکرده‌ایم.

[۵۹] ordinal

$$\forall t_{۱}, t_{۲}, t_{۳} \in x \quad (t_{۱} \in t_{۲} \in t_{۳} \to t_{۱} \in t_{۳})$$

$$\forall t_{۱}, t_{۲} \in x \quad t_{۱} \in t_{۲} \vee t_{۲} \in t_{۱} \vee t_{۱} = t_{۲}$$

تمرین ۲۳۶. نشان دهید که

۱. هر عدد طبیعی یک اردینال است.

۲. ω یک اردینال است.

۳. هر اردینال دارای یک عنصر ابتدا (یعنی یک مینی‌موم) است.

۴. اگر رابطه‌ی تعلق را روی تمام اردینالها در نظر بگیریم، آنها هر زیرکلاس از اردینالها دارای عنصر ابتدا است. (در زیر این اثبات شده است).

از این به بعد، کلاس همه‌ی اردینالها را با On نشان می‌دهیم. دقت کنید که وقتی از کلمه‌ی کلاس استفاده می‌کنیم، یعنی سیستم مورد نظر قابل تعریف در زداف‌سی است. در اینجا اردینال بودن، یک ویژگی قابل بیان در زداف‌اسی است، پس on یک کلاس است. در ادامه نشان خواهیم داد که هر دو اردینال، با یکدیگر قابل مقایسه (با رابطه‌ی تعلق) هستند. نخست نشان می‌دهیم که هر زیر کلاس از اردینالها دارای یک عنصر ابتدا (با رابطه‌ی تعلق) است.

لم ۲۳۷. هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از یک اردینال α دارای مینی‌موم است.

فرض کنید $H \subseteq \alpha$ و $x_{۰} \in H$. اگر $x_{۰}$ دارای مینی‌موم نباشد آنگاه $\exists x_{۱} \in x_{۰}$، و به این ترتیب بنا به اصل انتخاب و قضیه‌ی بازگشت، دنباله‌ی

$$x_{۰} \ni x_{۱} \ni x_{۲} \ni \dots$$

ساخته می‌شود. پس $\{x_{۱}, x_{۲}, \dots\}$ یک مجموعه است و این اصل انتظام را نقض می‌کند.

تعریف ۲۳۸. فرض کنید α یک اردینال باشد و $U \subseteq \alpha$. می‌گوییم U یک قطعه‌ی ابتدائیِ α است هرگاه برای هر $t \in U$

$$\{x \in U | x \in t\} = \{x \in \alpha | x \in t\}.$$

لم ۲۳۹. اگر U یک بخش ابتدائی از α باشد آنگاه یا $U \in \alpha$ یا $U = \alpha$.

اثبات. فرض کنید $U \neq \alpha$. فرض کنید

$$t = \min(\alpha - U).$$

ادعا می‌کنیم که $U = t$.
باید ثابت کنیم که

$$\begin{cases} ۱ \quad U \subseteq t \\ ۲ \quad t \subseteq U \end{cases}$$

اثبات اولی.

$$x \in U \Rightarrow \overset{(\text{زیرا}\ t,x \in \overset{\text{متعدی}}{\overset{\uparrow}{\alpha}})}{\left(x \notin t \rightarrow t \in x \vee t = x\right)}$$

از آنجا که U یک بخش ابتدائی از α است، داریم:

$$t \in U$$

پس $t \in t$ که این تناقض است.

اثبات دومی.

$$x \in t \rightarrow (x \notin U \rightarrow x \in t - U)$$

پس $t \in x$ (زیرا t مینی‌موم مجموعه‌ی سمت راست است)؛ تناقض با این که $x \in t$ یا $t = x$. □

مشابه روشی که برای اعداد طبیعی به کار بردیم، در زیر ثابت می‌کنیم که هر دو اردینال با هم قابل مقایسه هستند.

لم ۲۴۰. برای هر $x, y \in On$ یا $x \in y$ یا $y \in x$ یا $x = y$.

اثبات. اولاً (تحقیق کنید که) $x \cap y$ یک بخش ابتدائی از x (و از y) است. بنابراین $x \cap y = x$ یا $x \cap y \in x$ (برای y هم به همین ترتیب). مشابه بحثی که در لم ۲۳۲ داشتیم، از این گفته، حکم قضیه را نتیجه بگیرید. □

پس تا اینجا دیدیم (و اگر ندیدیم ثابت کنید) که $(On, \in)$ دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. $\in$ روی On یک ترتیب خطی است.

۲. هر زیر کلاسِ ناتهی $U \subseteq On$ دارای یک عنصر مینی‌موم است.

لم ۲۴۱. اگر α یک اردینال باشد آنگاه

$$\alpha = \{\beta \in On | \beta \in \alpha\}$$

اثبات. مجموعه‌ی دست راست را با A نشان دهید. بدیهی است که $A \subseteq \alpha$. حال دقت (و در صورت نیاز ثابت) کنید که اگر $\beta \in \alpha$ آنگاه $\beta \in On$. □

لم ۲۴۲. On مجموعه نیست.

اثبات. $(on, \in)$ تمام ویژگی‌های یک اردینال را دارد. پس اگر On یک مجموعه باشد آنگاه On اردینال است؛ یعنی $On \in On$ و این با اصل انتظام مغایرت دارد. □

مثال ۲۴۳. ۱. هر $\underline{n}$ یک اردینال است.

۲. ω یک اردینال است. (تحقیق کنید).

$$۰, ۱, ۲, ۳, \ldots, \omega, \ldots$$

۳. اگر α اردینال باشد، آنگاه $s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ نیز یک اردینال است. دقت کنید که

$$\alpha = \max s(\alpha).$$

از لمِ ۲۴۱ یک مفهوم استقراء به صورت زیر برای اردینالها نتیجه می‌شود.

لم ۲۴۴ (استقراءِ فرامتناهی). اگر $U \subseteq On$ و برای هر اردینال α داشته باشیم

$$\alpha \subseteq U \to \alpha \in U$$

آنگاه

$$U = On.$$

اثبات. اگر شرطهای لم برقرار باشند و $U \neq On$، آنگاه $On - U$ دارای مینی‌موم است. فرض کنید

$$t = \min On - U$$

پس هر اردینال $\alpha \in t$ متعلق به U است. پس $t \subseteq U$. از این رو $t \in U$؛ و این تناقض است. □

تعریف ۲۴۵. اردینال α را تالی [۶۰] می‌نامیم هرگاه

$$\exists \beta \in On \quad \alpha = \beta \cup \{\beta\}$$

در این صورت معمولاً می‌نویسیم

$$\alpha = \beta + ۱.$$

همچنین اردینالِ α را حدّی [۶۱] می‌نامیم هرگاه تالی نباشد.

تمرین ۲۴۶. اگر α حدی باشد آنگاه

$$\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$$

استقراء فرامتناهی [۶۲] را می‌توان به صورت زیر نیز فرمولبندی کرد:
فرض کنید $U \subseteq On$ دارای ویژگی‌های زیر باشد.

۱. $\emptyset \in U$

۲. برای هر اردینال $\alpha \in U$،

$$\alpha + ۱ \in U$$

۳. اگر β یک اردینال حدی باشد و برای هر $\gamma \in \beta$ داشته باشیم $\gamma \in U$ آنگاه $\beta \in U$.

آنگاه $U = On$.

---

[۶۰] successor
[۶۱] limit ordinal
[۶۲] transfinite induction

اثبات. اثبات کنید که اگر این شرط‌ها برقرار باشند، آنگاه برای هر اردینال α از $\alpha \subseteq U$ نتیجه می‌شود که $\alpha \in U$. $\square$

گفتیم که اردینالها، یا حدی هستند و یا تالی و هر اردینالِ تالی، اجتماع اردینالهای قبل از خود است. پس اردینالها به صورت زیر با محاسبه‌ی تالی‌ها و حد گرفتن حاصل می‌شوند:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \underbrace{\omega + \omega}_{\omega \times 2}, \omega + \omega + 1, \ldots, \underbrace{\omega + \omega + \omega}_{\omega \times 3}, \ldots, \underbrace{\omega \times \omega}_{\omega^2}, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^\omega, \ldots$$

دقت کنید که ω کوچکترین اردینالِ غیر تالی است و داریم $\omega = \bigcup_{n \in \omega} n$. اردینال حدیِ پس از ω اردینالِ $\omega + \omega = \bigcup_{n \in \omega} \omega + n$ است. به همین ترتیب، $\omega^\omega = \bigcup_{n \in \omega} \omega^n$.

در ادامه می‌خواهیم نشان دهیم که هر مجموعه‌ای در تناظر یک به یک با یک اردینال است. اگر مجموعه‌ی مورد نظر، خوش‌ترتیب باشد، با ترتیب روی خودش، با یک اردینال در تناظر یک به یک است:

تعریف ۲۴۷. مجموعه‌ی $(x, <)$ را خوش ترتیب می‌نامیم هرگاه $<$ روی x یک ترتیب خطی باشد و هر زیر مجموعه از x با این ترتیب دارای یک مینی‌موم باشد.

لم ۲۴۸. هر مجموعه‌ی خوش ترتیبِ $(x, <)$ ایزومرف با یک اردینالِ $(\alpha, \in)$ است؛ یعنی یک اردینالِ α و یک تابعِ یک به یک و پوشای

$$f : \alpha \to x$$

موجودند به طوری که

$$\beta_1 \in \beta_2 \leftrightarrow f(\beta_1) < f(\beta_2).$$

پیش از اثبات قضیه، یادآوری می‌کنم که منظور از یک تابعال، کلاسی (قابل تعریف) است که دارای ویژگی تابع بودن است. یک تابعال، چیزی شبیه به یک تابع است که اولاً توسط یک فرمول تعریف می‌شود و ثانیاً دامنه و برد آن لزوماً مجموعه نیستند.

توجه ۲۴۹. در اثبات قضیه‌ی زیر و چند قضیه‌ی دیگر در جلسات آینده، از **قضیه‌ی بازگشت روی اردینالها** استفاده شده است. **در واقع این قضیه، تعریف‌پذیریِ تابعالهای به کار رفته در این اثباتها، و حق استفاده از لم جانشانی را، در پایان هر اثبات تضمین می‌کند.** با این حال، با یک ملاحظه‌ی آموزشی، خودِ قضیه‌ی بازگشت، را پس از تمام این قضیه‌ها بیان خواهم کرد.

نمادگذاری ۲۵۰.

$$f[c] = \{f(b) | b \in c\}.$$

اثبات. فرض کنید $(x, <)$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد. فرض کنید $\star \notin x$. تابعال زیر را در نظر بگیرید.

$$f : On \to x \cup \{\star\}$$

$$f(\alpha) = \begin{cases} \min_< \quad x - f[\alpha] & \text{اگر } f[\alpha]\text{، }x \text{ را نپوشانده باشد} \\ \star & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

ادعا ۲. $\star$ حتماً توسط f پوشانده می‌شود. (پس یک اردینال α موجود است به طوری که $f[\alpha]$ تمام x را می‌پوشاند).

در غیر این صورت تابعال f برای هر اردینالِ α روی تمامِ $\beta \in \alpha$ تعریف می‌شود. پس تابعالِ f روی تمام اردینالها تعریف می‌شود. از طرفی α یک مجموعه است و f یک به یک است:

$$f^{-1}: \quad \overset{\text{یک زیر مجموعه‌ای از } x}{\overset{\uparrow}{f[On]}} \quad \to On$$

تصویر f^{-1} بنا به لم جانشانی یک مجموعه می‌شود اما f^{-1} همان On است.

قرار دهید

$$\alpha = \min\{\beta \in On | f(\beta) = \star\}$$

ثابت کنید که $(\alpha, \in) \cong (x, <)$. $\square$

در بالا ثابت کردیم که هر مجموعه‌ی خوش‌ترتیب، با یک اردینال ایزومرف است و این نگاشت ایزومرفیسم، ترتیب را نیز حفظ می‌کند. در ادامه می‌خواهیم ثابت کنید که روی هر مجموعه‌ی دلخواه، می‌توان یک ترتیب تعریف کرد که با آن ترتیب،مجموعه‌ی مورد نظر ما خوش‌ترتیب شود. این گفته به اصل خوش‌ترتیبی معروف است که در واقع، نتیجه‌ای از اصل انتخاب (و سایر اصول زدافسی) است. در زیر هر دوی این اصول را بیان کرده‌ام:

- اصل انتخاب:

$$\forall x (\forall y \in x \quad y \neq \emptyset \to \exists f: x \to \cup x \quad \forall t \in x \quad f(t) \in t)$$

- اصل خوش‌ترتیبی: روی هر مجموعه‌ی دلخواه x می‌توان یک ترتیب $<$ تعریف کرد به طوری که $(x, <)$ خوش‌ترتیب باشد.

در ادامه خواهیم دید که اصل خوش‌ترتیبی، یک قضیه در زدافسی است. علت آنکه به آن **اصل** خوش‌ترتیبی گفته می‌شود، این است که می‌توان به جای اصل انتخاب، اصل خوش‌ترتیبی را در زدافسی در نظر گرفت و در آن صورت، انتخاب یک قضیه است. در زیر این گفته را ثابت خواهیم کرد.

اثبات این که اصل انتخاب از اصل خوش‌ترتیبی نتیجه می‌شود، ساده است. فرض کنید x یک مجموعه باشد. بنا به اصل خوش‌ترتیبی، روی x یک ترتیب داریم که با آن هر زیرمجموعه‌اش دارای عنصر ابتدا است. تابع $f: x \to \cup x$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(y) = \min \quad y.$$

تابع بالا یک تابع انتخاب است. در زیر عکس این گفته را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۲۵۱. اصل خوش‌ترتیبی از اصل انتخاب نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید x یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. تابعال f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f: On \to x \cup \{*\}$$

$$\alpha \mapsto \begin{cases} \text{یک عضو انتخاب شده از } x - f[\alpha] & x - f[\alpha] \neq \varnothing \\ * & x = f[\alpha] \end{cases}$$

به بیان بهتر، فرض کنید g یک تابع انتخاب روی $P(x) - \varnothing$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(\alpha) = \begin{cases} g(x - f[\alpha]) & x - f[\alpha] \neq \varnothing \\ * & x = f[\alpha] \end{cases}$$

تابع f متوقف می‌شود. یعنی $\alpha \in On$ موجود است به طوری که $f(\alpha) = *$. زیرا در غیر این صورت f^{-1}(تصویرf) یک مجموعه می‌شود و $On =$ (تصویرf)f^{-1} (طبق اصل جانشانی).

بنابراین $\exists \alpha \in On \quad f(\alpha) = *$. فرض کنید α کوچک‌ترین اردینالی باشد که $f(\alpha) = *$. بررسی کنید که تابع $f : \alpha \to x$ $\underbrace{\text{یک به یک}}_{\text{تمرین}}$ و پوشاست. حال ترتیب α را روی x انتقال می‌دهیم؛ یعنی تعریف می‌کنیم:

$$\forall y, z \in x \quad y < z \Leftrightarrow \alpha_1 \in \alpha_2 \quad (f(\alpha_1) = y, f(\alpha_2) = z)$$

□

در بالا ثابت کردیم که اصل انتخاب را در زداف‌سی می‌توان با اصل خوش‌ترتیبی جایگزین کرد. در زیر نشان خواهیم داد که لم زُرن [۶۳] را نیز می‌توان به جای اصل انتخاب در زداف‌سی در نظر گرفت. در اثبات لم زرن، از این ایده استفاده کرده‌ایم که در یک مجموعه،نمی‌توان زنجیری به طول کلاس تمام اردینالها داشت.

یادآوری می‌کنم که به ترتیبی که خطی نباشد (یعنی وقتی لزوماً همه‌ی عناصر با هم قابل مقایسه نباشند) یک ترتیب جزئی گفته می‌شود. اگر $(A, <)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد، به هر زیرمجموعه از آن که با ترتیبِ $<$ مرتب خطی باشد، یک زنجیر گفته می‌شود.

قضیه ۲۵۲ (لم زُرن)**.** فرض کنید $(A, <)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی ناتهی باشد و فرض کنید که هر زنجیر $(B, <)$ در A دارای یک کران بالا در A باشد؛ یعنی

$$\exists \alpha \in A \quad \forall x \in B \quad \alpha \geq x.$$

آنگاه A دارای یک عنصر ماکزیمال است؛ یعنی عنصر $b \in A$ موجود است به طوری که $\forall a \in A \neg(a > b)$. [۶۴]

اثبات. یک تابع انتخاب، مثلاً به نام g، وجود دارد که از میان کران‌های بالای هر زنجیر یک عنصر انتخاب می‌کند. تابعالِ $f : On \to A$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$f(\alpha) = \begin{cases} g(f[\alpha]) & g(\alpha) \notin f[\alpha] \\ * & g(\alpha) \in f[\alpha]. \end{cases}$$

فرض کنید α کوچک‌ترین اردینالی باشد که $f(\alpha) = *$. در این صورت، کران بالای $f[\alpha]$ در واقع ماکزیمم $f[\alpha]$ است. این کران بالا یک عنصر ماکزیمال در A است. □

[۶۳] Zorn's lemma

[۶۴] درباره‌ی فرق یک عنصر ماکزیمال با یک عنصر ماکزیمم، مفصلاً در کلاس صحبت کردیم.

تمرین ۲۵۳. نشان دهید که اصل انتخاب از لم زرن نتیجه می‌شود. (راهنمایی: بین توابع انتخاب جزئی، ترتیب شمول را تعریف کنید و بدین ترتیب یک تابع ماکزیمال پیدا کنید که قرار است تابع انتخاب مورد نظر شما باشد.) [۶۵]

جلسه ی بیست و هفتم

در اکثر اثباتهای جلسه‌ی قبل از قضیه‌ی بازگشت، بی آن که نام آن را بیاوریم استفاده کردیم. یادآوری می‌کنم که منظور از یک تابعال، تابعی تعریف پذیر از کلاس همه‌ی مجموعه‌ها به کلاس همه‌ی مجموعه‌ها است. تابعی چون f را تعریف‌پذیر می‌نامیم هرگاه فرمولی چون $\phi(x,y,\bar{z})$ و مجموعه‌های $\bar{a}$ موجود باشند به طوری که

$$\{(x,f(x))|x\in V\}=\{(x,y)|x,y\in V\wedge\phi(x,y,\bar{a})\}.$$

اگر F یک تابعال و a یک مجموعه باشند، آنگاه با $f[a]$ مجموعه‌ی زیر را نشان می‌دهیم:

$$\{f(x)|x\in a\}.$$

گفتیم که اگر α یک اردینال باشد، آنگاه

$$\alpha=\{\beta\in On\mid\beta\in\alpha\}$$

قضیه ۲۵۴ (بازگشت)**.** فرض کنید $G:V\to V$ یک تابعال (تعریف پذیر) باشد. آنگاه یک تابعال $F:On\to V$ موجود است به طوری که

$$\forall\alpha\in On\ \ F(\alpha)=G(F[\alpha])$$

که همان گونه که در بالا گفتیم: $F[\alpha]=\{F(\beta)\mid\beta\in\alpha\}$

اثبات. نخست ادعا می‌کنیم که برای هر اردینالِ α یک تابع **یکتای** $F_\alpha:\alpha\to V$ موجود است به طوری که

$$\forall\beta\in\alpha\ \ F_\alpha(\beta)=G(F_\alpha[\beta])\qquad(*)$$

نخست یکتایی یک تابعِ این‌چنین را ثابت می‌کنیم. فرض کنید F_α^1وF_α^2 دو تابع باشند به صورت زیر

$$F_\alpha^i:\alpha\to V$$

که هر دو در شرط $*$ صدق کنند. فرض کنید $\beta\in\alpha$ اولین اردینالی باشد که در آن

$$F_\alpha^1(\beta)\neq F_\alpha^2(\beta).$$

بنابراین برای تمام $\beta'\in\beta$ داریم

$$F_\alpha^1(\beta')=F_\alpha^2(\beta')$$

یعنی

---

[۶۵] در صورت نیاز، به اثبات این گفته در جزوه‌ی مبانی ریاضی مدرس مراجعه کنید.

$$F^{۱}_\alpha[\beta] = F^{۲}_\alpha[\beta]$$

پس

$$.F^{۱}_\alpha(\beta) = G(F^{۱}_\alpha[\beta]) = F^{۲}_\alpha(\beta)$$

حال وجود تابعهای F_α را با استقراء فرامتناهی روی اردینالها ثابت می‌کنیم. برای اردینالِ صفر حکم برقرار است. فرض کنید $\alpha = \beta + ۱$ یک اردینال تالی باشد. بنا به فرض استقراء، تابعِ F_β موجود است. تعریف می‌کنیم

$$F_\alpha = F_\beta \cup \{(\beta, G(F[\beta]))\}$$

اگر α یک اردینال حدی باشد و برای هر $\beta \in \alpha$ تابعِ F_β موجود باشد، تعریف می‌کنیم

$$F_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} F_\beta.$$

دقت کنید که این که از یک اردینالِ α تابعی تعریف پذیر با ویژگی‌های خواسته شده در قضیه موجود است، در زبان مرتبه‌ی اول قابل بیان است؛ یعنی عبارت زیر یک عبارت مرتبه‌ی اول است.

$$\forall\alpha \in On \ \ \exists! F_\alpha : \alpha \to V$$
$$\forall\beta \in \alpha \ \ F(\beta) = G(F[\beta])$$

حال قرار دهید

$$F = \bigcup_{\alpha\in On} F_\alpha : On \to V$$

تابع بالا دارای ویژگی مورد نظر قضیه است. دقت کنید که تابع بالا تعریف پذیر (پس یک تابعال) است:

$$(x, y) \in F \leftrightarrow \exists\alpha \in On$$
$$(x, y) \in F_\alpha$$

□

فرض کنید α یک اردینال باشد و $S \subseteq \alpha$. روی S همان ترتیبِ α را اعمال کنید. در این صورت S با یک اردینالِ β ایزومرف است. ادعا می‌کنیم که در این صورت:

لم ۲۵۵. $\alpha = \beta$ یا $\beta \in \alpha$.

اثبات. حکم را با استقراء فرامتناهی روی β ثابت می‌کنیم. فرض کنید $S \subseteq \alpha$ تصویرِ ایزومرفِ یک اردینالِ β باشد؛ یعنی یک تابعِ یک به یک و پوشا و حافظِ ترتیبِ $f : \beta \to S \subseteq \alpha$ موجود باشد. فرض کنید حکم برای هر $\beta' \in \beta$ درست باشد. پس از آنجا که $S' = f[\beta'] \subseteq \alpha$ نتیجه می‌گیریم که یا $\beta' = \alpha$ یا $\beta' \in \alpha$. دقت کنید که $\beta' = \alpha$ نمی‌تواند رخ دهد زیرا $S = f[\beta] \subseteq \alpha$ و برای هر $x \in \alpha$ داریم $f(x) \geq x$. پس برای هر $\beta' \in \beta$ داریم $\beta' \in \alpha$. پس $\beta = \alpha$ یا $\beta \in \alpha$. □

اعمال اصلی روی اردینال ها

اعمال اصلی روی اردینالها، بر پایه‌ی قضیه‌ی بازگشت (قضیه‌ی ۲۵۴) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

جمع اردینالها.

قدم اول.

$$\alpha + ۰ = \alpha$$

مرحله ی تالی.

$$\alpha + (\beta + ۱) = S(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) + ۱$$

مرحله ی حدی. اگر γ یک اردینال حدی باشد، تعریف می کنیم

$$\alpha + \gamma = \bigcup_{\beta \in \gamma} \alpha + \beta$$

توجه ۲۵۶. داریم $۱ + \omega = \cup_{n \in \omega} ۱ + n = \omega$ ولی $\omega + ۱ = s(\omega) > \omega$ پس $\omega + ۱ \neq ۱ + \omega$.

ضرب اردینالها.

$$\alpha.۰ = ۰$$

$$\alpha.(\beta + ۱) = \alpha.\beta + \alpha$$

$$\alpha.\gamma = \bigcup_{\beta \in \gamma} \alpha.\beta \qquad (\gamma\text{یک اردینال حدی})$$

توجه ۲۵۷. به عبارات زیر توجه کنید.

$$۲.\omega = \bigcup_{n \in \omega} ۲.n = \bigcup_{n \in \omega} n = \omega$$
$$\omega.۲ = \omega.(۱ + ۱) = \omega + \omega$$
$$\Rightarrow ۲.\omega \neq \omega.۲$$

توان‌رسانی اردینالها.

$$\alpha^{۰} = \underline{۱}$$

$$\alpha^{\beta + ۱} = (\alpha^{\beta}).\alpha$$

$$\alpha^{\gamma} = \bigcup_{\beta \in \gamma} \alpha^{\beta} \qquad (\gamma\text{یک اردینال حدی})$$

توجه ۲۵۸. به عبارات زیر نیز توجه کنید.

$$۲^{\omega} = \bigcup_{n \in \omega} ۲^{n} = \omega$$
$$\omega^{۲} = \omega^{۱+۱} = \omega.\omega$$

اعداد اصلی (کاردینال ها)

دیدیم که در تعریف اردینال، ترتیب نقش اساسی را بازی می‌کند و ترتیبِ روی اردینالها همان رابطه‌ی تعلق است. اگر ترتیب روی اردینالها در نظر گرفته نشود، بسیاری از آنها با هم، **هم‌اندازه** هستند.

فرض کنید b و a دو مجموعه باشند. می‌نویسیم

$$|a| = |b|$$

هرگاه تابعی یک‌به‌یک و پوشا از a به b موجود باشد. رابطه‌ی $|a| = |b|$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در کلاس تمام مجموعه‌هاست. به هر کلاس هم‌ارزی در این رابطه، یک **عدد اصلی** یا **کاردینال** گفته می‌شود.

قبلاً ثابت کردیم که هر روی هر مجموعه، می‌توان یک ترتیب تعریف کرد که آن را خوش‌ترتیب کند. پس می‌توان به عنوان نماینده‌ی کلاس $|a|$ کوچکترین اردینالی را در نظر گرفت که با a هم‌اندازه است.

روی کاردینالها، ترتیبی بدین صورت تعریف می‌کنیم: $|a| \leq |b|$ هرگاه تابعی یک به یک از a به b موجود باشد.

لم ۲۵۹. فرض کنید α, β به ترتیب کوچکترین اردینالهای هم‌اندازه با a, b باشند. آنگاه $|a| \leq |b|$ اگروتنهااگر $\alpha \leq \beta$.

اثبات. اگر $|\alpha| \leq |\beta|$ آنگاه تابع شمول از α به β تابعی یک‌به‌یک است، بنابراین تابعی یک به یک از a، که هم‌اندازه‌ی α است، به b که هم‌اندازه‌ی β است موجود است.

از طرف دیگر، اگر از a به b تابعی یک به یک موجود باشد آنگاه تابعی یک به یک، فرضاً f، از α به β موجود است. تصویرِ f را با S نشان دهید و از لمِ ۲۵۵ استفاده کنید. $\square$

در درس مبانی ریاضی، تحت عنوان قضیه‌ی شرودرـ برنشتاین، ثابت کردیم که اگر از a به b تابعی یک به یک موجود باشد، و از b به a نیز یک تابع یک به یک موجود باشد، آنگاه تابعی یک به یک و پوشا میان a و b موجود است. بنابراین اگر $|a| \leq |b|$ و $|b| \leq |a|$ آنگاه $|a| = |b|$. اثباتی که در این درس برای این گفته ارائه کردیم، به لطف آشنائی با اردینالها، بسیار ساده‌تر است؛ البته ناگفته نماند که در آن اثبات (که در جزوه‌ی مبانی ریاضی‌ام موجود است) از اصل انتخاب استفاده نشده بود، ولی اثبات زیر، مبتنی بر اصل خوش‌ترتیبی (و از این رو بر اصل انتخاب) است. یاد گرفتن آن اثبات را به صورت تمرین در زیر به عهده‌ی شما گذاشته‌ام.

تمرین ۲۶۰. قضیه ی شرودرـ برنشتاین را بدون استفاده از اصل انتخاب ثابت کنید.

قضیه ۲۶۱ (شرودرـ برنشتاین)**.** اگر $|a| \leq |b|$ و $|b| \leq |a|$ آنگاه $|a| = |b|$.

اثبات. فرض کنید α, β به ترتیب کوچکترین اردینالهای هم‌اندازه با a, b باشند. بنا به لم ۲۵۹ داریم $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$؛ پس بنا به ویژگیهای اردینالها، $\alpha = \beta$. و این بوضوح نتیجه می‌شود که $|a| = |b|$. $\square$

تعریف ۲۶۲. نماینده‌ی کلاسِ $|\omega|$ را با $\aleph_0$ (الفْ‌صفر) نمایش می‌دهیم. به طور کلی، وقتی می‌گوییم $\kappa = |a|$ یعنی κ اولین اردینالی است که هم‌اندازه با a است. [۶۶] مجموعه‌ی a را متناهی می نامیم هرگاه $|a| < \aleph_0$. مجموعه‌ی a را شمارای نامتناهی می‌نامیم هرگاه $|a| = \aleph_0$؛ و a را ناشمارا می‌نامیم هرگاه $|a| > \aleph_0$.

[۶۶] $\aleph$ حرف اول الفبایِ عبری است.

این که نامتناهی‌ها نیز دارای اندازه‌های متفاوت هستند، کشفی از کانتور بود که پذیرش آن برای همعصران او چندان آسان نبود. همچنین قضیه‌ی زیر از کانتور، بیانگر این است که از هر نامتناهی، یک نامتناهی بزرگتر پیدا می‌شود. پس نامتناهی‌ها (اگر وجود داشته باشند) به طور نامحدود بزرگتر و بزرگتر می‌شوند.

قضیه ۲۶۳ (کانتور). برای هر مجموعه‌ی a داریم

$$|a| < |P(a)|؛$$

یادآوری می‌کنم که $P(a)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های a است.

اثبات. واضح است که یک تابع یک به یک از a به $P(a)$ موجود است.

$$x \mapsto \{x\}$$

ادعا می‌کنیم که چنین تابعی نمی‌تواند پوشا باشد.

فرض کنید $f : a \to P(a)$ یک‌به‌یک و پوشا باشد. مجموعه‌ی زیر باید توسط تابع f پوشیده شود:

$$c = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}.$$

پس

$$\exists b \in a \quad f(b) = c = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$$

داریم:

$$b \in f(b) \leftrightarrow b \notin f(b)؛$$

و این تناقض است. □

پس، اندازه‌ی تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه، اکیداً بیشتر از اندازه‌ی خودِ آن مجموعه است. اگر a یک مجموعه باشد، آنگاه متناظر با هر زیرمجموعه از a می‌توان یک تابع از a به مجموعه‌ی $\underline{۲} = \{۰, ۱\}$ در نظر گرفت. اگر $b \subseteq a$ آنگاه تابع $f_b : a \to \{۰, ۱\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_b(x) = ۱ \leftrightarrow x \in b.$$

بنابراین $|P(a)|$ برابر است با اندازه‌ی مجموعه‌ی متشکل از تمام توابعِ از مجموعه‌ی a به مجموعه‌ی $\underline{۲}$. بدین علت می‌نویسیم که برای یک کاردینالِ a داریم

$$|P(a)| = ۲^{|a|}.$$

مجموعه‌ی $\underline{۲}^a$ را همچنین می‌توان به عنوان مجموعه‌های دنباله‌های صفرویکی به طول $|a|$ در نظر گرفت.

دقت کنید که هر دنباله‌ی شمارا از صفرویک را می‌توان بسطِ در مبنای دوی یک عدد حقیقی در نظر گرفت. از این رو

$$۲^{\aleph_۰} = |\mathbb{R}|.$$

همچنین دقت کنید که $۲^{\aleph_۰}$ را می‌توان تعداد تمام شاخه‌های درختی در نظر گرفت که روی هر گره آن یک دنباله‌ی متناهی از صفر و یک نشسته است.

تا این جا با چندین کاردینال غیر هم‌اندازه آشنا شده‌ایم: کاردینالهای متناهی، کاردینالِ الف‌صفر و کاردینالِ $۲^{\aleph_۰}$. به طور خلاصه، اگر $m, n \in \omega$ آنگاه $|n| = |m|$ اگروتنهااگر $m = n$. از طرفی $\aleph_۰ = |\omega|$ و $۲^{\aleph_۰} = |P(\omega)|$.

قضیه ۲۶۴. فرض کنید a یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد. آنگاه

$$|a \times a| = |a|$$

منظور از $a \times a$ حاصلضرب دکارتی مجموعه‌ی a در خودش است.

اثبات. فرض کنید α کوچکترین اردینالِ هم‌اندازه با a باشد. قضیه را با استقراء فرامتناهی روی α ثابت خواهیم کرد.

دقت کنید که قدم اول استقراء در اینجا $\alpha = \omega$ است. پس ابتدا باید نشان دهیم که

$$|\omega \times \omega| = |\omega|.$$

واضح است که $|\omega| \leq |\omega \times \omega|$. برای اثباتِ این که $|\omega \times \omega| \leq |\omega|$ یک اردینالِ هم‌اندازه با $\omega \times \omega$ پیدا می‌کنیم و نشان می‌دهیم که آن اردینال از ω کمتر است.

روی $\omega \times \omega$ ترتیب زیر را تعریف کنید:

$$(m,n) < (m',n') \Leftrightarrow (max(m,n), m, n) <_{\text{ترتیب قاموسی}} (max(m',n'), m', n')$$

به عنوان یک تمرین ساده، نشان دهید که با ترتیب بالا $\omega \times \omega$ خوش‌ترتیب است. بنابراین $\omega \times \omega$ با این ترتیب، با یک اردینالِ γ در تناظر یک‌به‌یکِ ترتیبی است. برای این که نشان دهیم که اردینالِ γ از ω بیشتر نیست، (از آنجا که هر اردینال مجموعه‌ی اردینالهای قبل از خودش است) کافی است نشان دهیم که هر اردینالی که از γ کمتر است، متناهی است.

فرض کنید $\beta \in \gamma$. آنگاه β متناظر با یک زوجِ $(m,n) \in \omega \times \omega$ است. با ترتیبِ بالا، تعداد عناصری که از (m,n) کمتر هستند، حداکثر برابر با $\max m,n \cdot \max m,n$ است و از این رو متناهی است.

برای اثبات قضیه برای اردینالِ دلخواهِ α نیز به صورت مشابه عمل می‌کنیم. روی $a \times a$ ترتیبی مشابه ترتیب بالا تعریف می‌کنیم. فرض کنید $a \times a$ متناظر با اردینالِ γ باشد. اگر $\beta \in \gamma$ آنگاه β متناظر با یک عنصرِ $(c,d) \in a \times a$ است. فرض کنید $c = \max c,d$. بنا به فرض استقراء داریم $|c| = |c \times c|$. همچنین اندازه‌ی مجموعه‌ی عناصرِ کمتر یا مساویِ (c,d) برابر با $|c| = |c \times c|$ است. پس $c \leq a$. □

نتیجه ۲۶۵.
- $\aleph_۰ = |\omega| = |\omega + \underline{n}|$؛ زیرا می‌توان به راحتی نگاشتی یک به یک از $\omega \times \omega$ به $\omega + n$ پیدا کرد.
- $\omega + \omega = \bigcup \omega + n$. از $\omega + \omega$ نیز به راحتی می‌توان نگاشتی یک به یک به $\omega \times \omega$ تعریف کرد. پس $|\omega \cdot ۲| = |\omega + \omega| = \aleph_۰$.
- به همین ترتیب برای هر $n \in \omega$ داریم $\aleph_۰ = |\omega \cdot \underline{n}|$.
- پس، اندازه‌ی همه‌ی اردینالهای زیر برابر با الف‌صفر است:

$$\omega, \omega + ۱, \ldots, \omega + \omega, \omega \cdot \underline{۳}, \ldots, \omega \cdot \omega, \ldots, \omega^{۳}, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots$$

اندازه‌ی همه‌ی اردینالهای بالا برابر با الف‌صفر است؛ ولی می‌دانیم که اندازه‌ی اردینالی که با مجموعه‌ی $|P(\omega)|$ هم‌اندازه است، اکیداً از الف‌صفر بیشتر است. این اردینال را با $2^{\aleph_0}$ نشان می‌دهیم. [67] سوال طبیعی اینجاست که اولین گذار به اردینالی با اندازه‌ی اکیداً بزرگتر از الف‌صفر در کجا اتفاق می‌افتد. به بیان دیگر، اولین اردینالی که از لحاظ اندازه اکیداً از الف‌صفر بزرگتر است، کدام است. اندازه‌ی این اردینال را با $\aleph_1$ نشان می‌دهیم. اما یک حدس معروف، به نام «فرضیه‌ی پیوستار» بیانگر این است که بین اندازه‌ی $\aleph_0$ و اندازه‌ی $2^{\aleph_0}$ هیچ اندازه‌ی وجود ندارد.

فرضیه‌ی پیوستار

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}.$$

فرضیه‌ی پیوستار در منطق مرتبه‌ی اول قابل بیان است. پس یک سوال طبیعی این است که آیا

$$ZFC \vdash \aleph_1 = 2^{\aleph_0}.$$

ثابت شده است (کوهن و گودل) که نه فرضیه‌ی پیوستار در زداف‌سی قابل‌اثبات است و نه نقیض آن؛ یعنی، فرضیه‌ی پیوستار از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها مستقل است. این نکته ما را به پایان درس نزدیکتر می‌کند.

مختصری درباره‌ی قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل

پیش از آنکه وارد بحث درباره‌ی قضیه‌ی ناتمامیت شوم، لازم می‌دانم آنچه را که در طول این ترم دیدیم به سرعت مرور کنم. گفتیم که اصول اولیه حاکم بر فکر ریاضی، منطق گزاره‌هاست؛ اما بنای ریاضیات نیازمند منطقی جامعتر به نام منطق مرتبه‌ی اول است. هر چه در این منطق ثابت می‌شود درست است و هر چه درست باشد در آن اثبات پذیر است. در این منطق می‌توان بسیاری پدیده‌های ریاضی را اصل‌بندی کرد. پس باید تلاش کرد که یک اصل‌بندی جامع برای تمام ریاضیات در این منطق ارائه شود. از آنجا که بسیاری پدیده‌های ریاضی، به نوعی مجموعه هستند، برای اصل‌بندی ریاضیات کافی است نظریه‌ی مجموعه‌ها اصل‌بندی شود. مجموعه‌ی اصول زداف‌اسی سیستم کارآمدی برای اصل‌بندی ریاضیات است. بسیاری تناقضات اولیه، مانند پاردوکس راسل در زداف‌سی به راحتی برطرف شده‌اند. با این حال دو پرسش مهم را باید درباره‌ی این اصول پرسید.

- آیا ممکن است این اصول منجر به یک تناقض شوند؟ یعنی آیا ممکن است که گزاره‌ای به نام ϕ پیدا شود، به طوری که

$$ZFC \vdash \phi \wedge \neg\phi.$$

  بنا به قضیه‌ی فشردگی، منجر نشدن زداف‌سی به تناقضات، معادل با وجود یک مدل برای آن است. پس این سوال را می‌توان بدین گونه فرمولبندی کرد: آیا زداف‌سی دارای مدل است؛ یعنی آیا جهانی به نام جهان نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌تواند وجود داشته باشد؟

- آیا زداف‌سی یک اصل‌بندی کامل برای ریاضیات است؛ یعنی آیا زداف‌سی اینچنین است که برای هر جمله‌ی دلخواهِ ϕ در نظریه‌ی مجموعه‌ها داشته باشیم $ZFC \vdash \phi$ یا $ZFC \vdash \neg\phi$.

[67] دقت کنید که این اردینال، اردینالِ 2^ω نیست. متأسفانه این نمادگذاری‌ها کمی گیج‌کننده است. برای ما، 2^ω اگر منظور توانرسانی اردینالها باشد برابر با ω است. از طرفی $2^{\aleph_0}$ برابر است با اندازه‌ی مجموعه‌ی $p(\omega)$. این مجموعه، هم‌اندازه با مجموعه‌ی $\{0,1\}^\omega$ است.

قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل برای پاسخ دادن به سوالهای بالاست. در ادامه‌ی درس، صورت این قضیه و اثباتی برای آن را به صورتی کاملاً حداقلی بیان خواهم کرد تا دانشجویان را با طعمی از آن آشنا سازم. امیدوارم در سریهای آینده تدریس این درس، فرصت برای کامل کردن این اثبات دست دهد.

نخست به هر علامت زبانی در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها یک کد (در خودِ نظریه‌ی مجموعه‌ها) اختصاص دهید:

$$\ulcorner = \urcorner = \{(۰, ۰)\}$$
$$\ulcorner \in \urcorner = \{(۰, ۱)\}$$
$$\ulcorner \wedge \urcorner = \{(۰, ۲)\}$$
$$\ulcorner \neg \urcorner = \{(۰, ۳)\}$$
$$\ulcorner \forall \urcorner = \{(۰, ۴)\}$$
$$\ulcorner \exists \urcorner = \{(۰, ۵)\}$$
$$\ulcorner v_۰ \urcorner = \{(۱, ۰)\}$$
$$\ulcorner v_۱ \urcorner = \{(۱, ۱)\}$$
$$\ulcorner v_۲ \urcorner = \{(۱, ۲)\}$$
$$\vdots$$

به همین ترتیب، به یک فرمولِ

$$\phi = \zeta_۱ \dots \zeta_n$$

یک کد به صورت زیر نسبت داده می‌شود:

$$\ulcorner \phi \urcorner = \{(۰, \ulcorner \zeta_۱ \urcorner), \dots (n, \ulcorner \zeta_n \urcorner)\}$$

همه‌ی فرمولهای قابل اثبات را می‌توان با استفاده از اصول زدافسی و به‌کارگیری روشهای استنتاج ایجاد کرد. فرمولی مرتبه‌ی اول به نام $Bew(x)$ وجود دارد که بیانگر این است که x کُدِ یک فرمولِ قابل اثبات در زدافسی است.

لم ۲۶۶ (قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت تارسکی)**.** برای هر فرمولِ $\sum(x)$ یک جمله‌ی ϕ موجود است به طوری که

$$ZFC \vdash \sum(\ulcorner \phi \urcorner) \leftrightarrow \phi.$$

طرح اثبات. یک تابعال تعریف پذیرِ $f(x, y)$ موجود است به طوری که اگر x کد فرمولِ ϕ و y کد فرمولِ ψ باشد، آنگاه $f(x, y)$ کد فرمولِ $\phi(\ulcorner \psi \urcorner)$ را به دست می‌دهد.

قرار دهید $\psi(x) = \sum(f(x, x))$. قرار دهید $\phi = \psi(\ulcorner \psi \urcorner)$ و بررسی کنید که این فرمول خواسته‌ی قضیه را برآورده می‌کند. $\square$

فرض کنید F یک فرمول همواره غلط باشد؛ برای مثال فرض کنید $F = \neg(x = x)$. قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل بیانگر این است که از زداف‌سی تناقض ندهد، آنگاه کامل نیست؛ یعنی جمله‌ای پیدا می‌شود که در زداف‌سی قابل اثبات نیست.

قضیه ۲۶۷ (قضیه‌ی ناتمامیت دوم گودل)**.** اگر ZFC سازگار باشد، آنگاه

$$ZFC \nvdash Con_{ZFC}.$$

اثبات. بنا به قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت تارسکی، یک جمله‌ی ϕ وجود دارد به طوری که

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner). \quad *$$

ادعا می‌کنم که با فرض سازگاریِ زداف‌سی داریم:

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow Con_{ZFC}.$$

پیش از اثبات این ادعا، توجه کنید که اگر ادعا ثابت شود، آنگاه حکم مورد نیاز قضیه ثابت می‌شود؛ زیرا با فرض درست بودن ادعا اگر $ZFC \vdash Con_{ZFC}$ آنگاه $ZFC \vdash \phi$. پس (بنا به ویژگی‌های رابطه‌ی Bew) داریم

$$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner). \quad **$$

از طرفی از $ZFC \vdash \phi$ بنا به $*$ نتیجه می‌شود که

$$ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \quad ***$$

اما $**$ و $***$ با فرض سازگاری زداف‌سی تناقض می‌دهند.

تنها چیزی که مانده است اثبات شود، ادعای بالاست. نخست نشان می‌دهیم که

$$ZFC \vdash \phi \to Con_{ZFC}.$$

نخست توجه کنید که $ZFC \vdash F \to \phi$. بنابراین $ZFC \vdash Bew\ulcorner F\urcorner \to Bew\ulcorner\phi\urcorner$. یعنی $ZFC \vdash \neg Con_{ZFC} \to Bew\ulcorner\phi\urcorner$. پس بنا به $*$

$$ZFC \vdash \neg Con_{ZFC} \to \neg\phi$$

و این همان است که می‌خواهیم.

در ادامه ثابت می‌کنیم

$$ZFC \vdash Con_{ZFC} \to \phi.$$

داریم

۱. $ZFC \vdash \phi \rightarrow \neg Bew\ulcorner\phi\urcorner$ پس

۲. $ZFC \vdash Bew\ulcorner\phi\urcorner \rightarrow Bew\ulcorner\neg Bew\ulcorner\phi\urcorner\urcorner$ پس

۳. $ZFC \vdash Bew\ulcorner\phi\urcorner \rightarrow Bew(\ulcorner\neg Bew\ulcorner\phi\urcorner\urcorner \wedge Bew(\ulcorner Bew\ulcorner\phi\urcorner\urcorner))$ اما داریم

۴. $ZFC \vdash Bew\ulcorner\neg Bew\ulcorner\phi\urcorner\urcorner \wedge Bew\ulcorner Bew\ulcorner\phi\urcorner\urcorner \rightarrow Bew\ulcorner F\urcorner$ پس

۵. $ZFC \vdash Bew\ulcorner\phi\urcorner \rightarrow \neg Con_{ZFC}$ و از این رو

۶. $ZFC \vdash Con_{ZFC} \rightarrow \phi$.

$\square$