۱ جلسه سیزدهم ادامه‌ی درستی و شروع نظریه‌ی اثبات

از جلسه‌ی قبل یادآوری می‌کنم که $\mathcal{L}$فرمول φ را همواره‌درست می خوانیم هرگاه به ازای هر $\mathcal{L}$ساختار $\mathfrak{M}$ و برای هر نگاشت ارزیابی $\beta : var \to M$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta]$. به بیان دیگر فرمول $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ همواره درست است هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ساختار $\mathfrak{M}$ و برای هر چندتایی $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. نیز به بیان دیگر فرمول $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ همواره درست است هرگاه جمله‌ی $\forall x_1, \ldots, x_n \; \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ در هر $\mathcal{L}$ساختاری درست باشد.

تعریف ۱ (تاتولوژی)**.** $\mathcal{L}$فرمول φ را یک **تاتولوژی** می‌نامیم هرگاه به صورت $f(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ باشد که در آن $f(p_1, \ldots, p_n)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها است و $\psi_1, \ldots, \psi_n$ همگی، $\mathcal{L}$فرمول هستند.

مثال ۲. فرمول‌هایی به صورت $\varphi \vee (\neg\varphi)$ یا $(\varphi \to \psi) \wedge (\neg\varphi \to \psi) \to \psi$ تاتولوژی هستند (ϕ, ψ می‌توانند هر فرمول مرتبه‌ی اولی باشند).

لم ۳. تاتولوژی ها همواره درست هستند.

اثبات. فرض کنید $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ یک تاتولوژی و $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشند. فرض کنید $a_1, \ldots, a_n \in M$. هدفمان اثبات این است که

$$\mathfrak{M} \models f(\varphi_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \varphi_n(a_1, \ldots, a_n)).$$

فرمول $f(p_1, \ldots, p_n)$ در منطق گزاره‌ها یک تاتولوژی است؛ ارزیابی زیر را برای گزاره های اتمی به کار رفته در آن در نظر بگیرید.

$$v(p_i) = 1 \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi_i(a_1, \ldots, a_n)$$

از آنجا که فرمول $f(p_1, \ldots, p_n)$ تاتولوژی (در منطق گزارها) است داریم $v(f(p_1, \ldots, p_n)) = 1$؛ و این دقیقاً یعنی فرمول $f(\phi_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \phi_n(a_1, \ldots, a_n))$ در $\mathfrak{M}$ درست است. $\square$

نمادگذاری ۴. می‌نویسیم $\models \varphi$، هرگاه فرمول φ همواره درست باشد. در جلسه‌ی قبل ثابت کردیم که زبانْ نقشی در نمادگذاری بالا بازی نمی‌کند (یعنی کافی است فرمول مورد نظر را در زبانی در نظر بگیریم که حداقل علائم لازم برای نوشتن آن فرمول را داشته باشد).

گفتیم که تاتولوژی‌ها مصداقی از فرمولهای همواره درست هستند. در زیر با چند روش دیگر برای رسیدن به فرمولهای همواره درست آشنا می‌شویم.

لم ۵ (اصول تساوی)**.** جمله‌های زیر در هر زبانی همواره درستند.

$$\forall x \quad x \doteq x$$

$$\forall x, y \quad x \doteq y \to y \doteq x$$

$$\forall x, y, z \quad x \doteq y \wedge y \doteq z \to x \doteq z$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n \quad \forall y_1, \ldots, y_n \,(x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n \to R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$$

(برای هر رابطه $R \in \mathcal{L}$ و هر تعداد موضع n)

$$\forall x_1, \ldots, x_n \,\forall y_1, \ldots, y_n \,(x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$$

(برای هر نماد تابعی $f \in \mathcal{L}$ و هر تعداد موضع f)

لم ۶ (لم سور وجودی)**.** فرض کنید φ یک $\mathcal{L}$فرمول و t یک ترم باشند. آنگاه، به شرط این که متغیرِ x نسبت به ترمِ t در فرمولِ φ آزاد باشد، فرمول زیر همواره درست است.

$$\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi$$

توجه ۷. شرط آزاد بودن x نسبت به t در فرمول φ برای لم بالا لازم است. برای مثال اگر

$$\varphi(x) = \forall y \quad y = x$$

و $t = y$ آنگاه

$$\varphi\frac{y}{x} : \quad \forall y \quad y = y$$

و

$$\exists x\varphi : \quad \exists x \forall y \quad y = x$$

واضح است که فرمول دوم از فرمول اول نتیجه نمی‌شود.

تمرین ۱. چند مثال دیگر برای عدم درستی لم بالا در صورت آزاد نبودن x نسبت به t بسازید.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار و β یک تابع تعبیر متغیرها در M باشند. هدفمان اثباتِ این است که

$$\mathfrak{M} \models (\varphi\frac{t}{x} \to \forall x\varphi)[\beta]$$

طبق تعریفِ درستی یک فرمول در یک ساختار، برای اثبات عبارت بالا کافی است نشان دهیم که اگر $\mathfrak{M} \models \varphi\frac{t}{x}[\beta]$ آنگاه $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi[\beta]$. بنابر آنچه در جلسات قبل ثابت کرده ایم می‌دانیم که از $\mathfrak{M} \models \varphi\frac{t}{x}[\beta]$ نتیجه می‌شود که $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta\frac{t^{\mathfrak{M}}[\beta]}{x}]$. (توجه کنید که این قضیه در صورتی درست بود که x نسبت به t در φ آزاد باشد.) واضح است که از $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta\frac{t^{\mathfrak{M}}[\beta]}{x}]$ نتیجه می شود که $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi$. (زیرا $a = t^{\mathfrak{M}}[\beta]$ عنصری در M است که فرمول مورد نظر را برای ما برآورده می‌کند). $\square$

لم ۸ (قیاس استثنائی)**.** اگر فرمولهای φ و $\psi \to \varphi$ **هردو همواره درست باشند** آنگاه ψ همواره درست است.

اثبات. فرض کنید $\phi, \phi \to \psi$ فرمولهایی همواره درست باشند. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار و β یک تابع تعبیر متغیرها باشند. هدفمان اثبات این است که $\mathfrak{M} \models \psi[\beta]$.

از آنجا که φ و $\psi \to \varphi$ همواره درست هستند داریم $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta], \mathfrak{M} \models \varphi \to \psi[\beta]$ پس $\mathfrak{M} \models \psi[\beta]$. $\square$

لم ۹. (معرفی سور وجودی) اگر فرمول $\psi \to \varphi$ همواره درست باشد و x **جزو متغیرهای آزادِ** ψ **نباشد،** آنگاه فرمول زیر همواره درست است:

$$\exists x\varphi \to \psi$$

لم بالا شاید کمی عجیب به نظر برسد: اگر از درست بودن فرمولِ ϕ با متغیر آزادِ x درست بودن فرمولِ ψ نتیجه شود، آنگاه از درست بودن فرمولِ ϕ تنها در یک مصداق، درستی فرمولِ ψ نتیجه می‌شود (البته اگر فرمولِ ψ متغیرِ x را به صورت آزاد نداشته باشد). جمله‌ی زیر را برای فهم بهتر لم بالا در نظر بگیرید: در کلاس شما x غیبت می کند؛ مینا کلاه دارد. فرض کنید این گزاره همواره درست باشد: اگر x غیبت کند $\rightarrow$ مینا کلاه دارد. **اگر فرمول بالا همواره درست باشد،** پس x هر کس که باشد، فرمول بالا درست است؛ یعنی این فرمول با هر ارزیابی‌ای از متغیرها درست است. بنابراین وجود یک نفر که غیبت کند، برای کلاه داشتن مینا کافی است.

تمرین ۲. چند مثال ریاضی برای درستی لم بالا ارائه دهید.

توجه ۱۰. در لم بالا شرط آزاد نبودنِ x در ψ لازم است. برای مثال از همواره درست بودن فرمول

$$x < ۱ + ۱ \rightarrow x < ۱ + ۱ + ۱$$

در زبان حلقه‌های مرتب، همواره درست بودن فرمولِ

$$(\exists x \quad x < ۲) \rightarrow x < ۳$$

نتیجه نمی‌شود.

اثبات لم معرفی سور وجودی. فرض: فرمول $\psi \rightarrow \varphi$ همواره درست است و $x \notin Fv(\psi)$. حکم: اگر $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار و β یک تابع ارزیابی متغیرهاباشند؛ اثبات این که $\mathfrak{M} \models (\exists x\varphi \rightarrow \psi)[\beta]$. فرض کنید $\mathfrak{M} \models \exists x\varphi[\beta]$. طبق تعریفِ درستی فرمولها در ساختارها، برای یک عنصر مشخص $a \in M$ داریم $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta\frac{a}{x}]$. می‌دانیم که فرمول $\psi \rightarrow \varphi$ همواره درست است؛ پس $\mathfrak{M} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\beta\frac{a}{x}]$. بنابراین از $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta\frac{a}{x}]$ نتیجه می‌شود که $\mathfrak{M} \models \psi[\beta]$. $\square$

تمرین ۳. بررسی کنید کدام یک از فرمولهای زیر همواره درست است و کدام همواره درست نیست (همواره درست بودن را در مدلها بررسی کنید و برای همواره درست نبودن مثال بیاورید).

۱. $\exists xA \wedge \exists xB \rightarrow \exists x \quad A \wedge B$

۲. $\exists x \quad A \wedge B \rightarrow \exists xA \wedge \exists xB$

۳. $\exists xA \wedge \exists xB \rightarrow \exists x(A \wedge B)$ در صورتی که $x \notin Fv(B)$

۴. $\forall xA \wedge \forall xB \rightarrow \forall x(A \wedge B)$

۵. $\forall x(A \wedge B) \rightarrow \forall xA \wedge \forall xB$

۶. $\forall x(A \wedge B) \rightarrow \forall xA \wedge \forall xB$ در صورتی که $x \notin Fv(B)$

تمرین ۴. نشان دهید که هر فرمول مرتبه اول φ معادلی در **صورت نرمال پیشوندی** دارد. یعنی اگر φ یک فرمول باشد فرمول ψ به صورت زیر پیدا می شود به طوری که $\psi \leftrightarrow \varphi$ همواره درست است.

$$\psi : Q_۱Q_۲ \dots Q_n\chi$$

که در آن

$$Q_i \in \{\forall x, \exists x\}$$

و فرمول χ بدون سور است.

۱.۱ نظریه‌ی اثبات

در این جلسه و جلسه‌ی قبل، عبارت $\models \varphi$ را تعریف کردیم. این عبارت یعنی «فرمول φ در همه‌ی ساختارها درست است». بررسی درستی فرمولها، جزو مبحث معناشناسی (و به طور خاص جزو نظریه‌ی مدل) است. در ادامه‌ی درس عبارتِ $\vdash \varphi$ را تعریف خواهیم کرد که قرار است بیانگر این باشد که فرمولِ φ «اثبات‌پذیر» است. دقت کنید که برای اثبات یک فرمول، نیاز به بررسی آن در مدلهای مختلف نخواهیم داشت، بلکه کافی است با روشهای استانداری برای استدلال، به آن فرمول برسیم. از همه مهمتر برای ما، اثبات قضیه‌ی تمامیت خواهد بود که می‌گوید $\vdash \varphi$ و $\models \varphi$ با هم معادلند؛ یعنی یک فرمول داده شده، درست است اگروتنهااگر قابل اثبات باشد. در واقع قضیه‌ی تمامیت قرار است ارتباط بین نظریه‌ی مدل و نظریه‌ی اثبات را بیان کند. اثباتْ یک دنباله از فرمولها بدون در نظر گرفتن معنی است، که به فرمول خاصی ختم می‌شود. بنا به قضیه‌ی درستی و تمامیت، فرمولی که از یک اثبات به دست بیاید در همه‌ی مدلها رخ می‌دهد، و اگر فرمولی در همه‌ی مدلها رخ دهد باید برایش اثبات پیدا شود.

اثبات‌پذیری را نخست در دستگاه استنتاجیِ هیلبرت معرفی خواهیم کرد و سپس در درسهای آینده به دستگاه استنتاج طبیعی (گنتزن) نیز خواهیم پرداخت.

تعریف ۱۱. می گوییم فرمول φ در زبان $\mathcal{L}$ اثبات‌پذیر است و می نویسیم $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ هرگاه فرمول φ **در دستگاه هیلبرت قابل اثبات باشد.** یعنی یکی از اتفاقات زیر رخ دهد:

۱. φ یک تاتولوژی باشد.

۲. φ یکی از اصول تساوی باشد.

۳. φ یک مصداق از لم سور وجودی باشد یعنی $\varphi : (\psi\frac{t}{x} \to \exists x\psi)$

۴. φ با استفاده از قیاس استثنائی از از دو فرمولِ قبلاًثابت‌شده‌ی $\psi \to \varphi$ و ψ نتیجه شود؛ به بیان دیگر یعنی

$$\frac{\vdash \psi \quad \vdash \psi \to \varphi}{\vdash \varphi}(MP)$$

۵. φ توسط لم معرفی سور وجودی از فرمولِ قبلاًثابت‌شده‌ی $\psi \to \chi$ نتیجه شود. یعنی فرمولِ ϕ به صورتِ $\exists\psi \to \chi$ باشد که به صورت زیر به دست آمده است:

$$\frac{\vdash \psi \to \chi \ \ , x \notin Fv(\chi)}{\vdash \exists x\psi \to \chi}$$

درواقع وقتی می‌نویسیم $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ یعنی یک دنباله $\psi_۱ \dots \psi_n$ موجود است، به طوری که $\psi_n = \varphi$ و ψ_i ها توسط قوانین ۱ تا ۵ ایجاد شده‌اند.

از آقای «امیر نیک‌آبادی» بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم. علت تأخیرم در بارگذاری جزوه‌ی این جلسه، سفر به تهران برای حضور در یک دوره‌ی کوتاه بود.