

۱ جلسه نهم، ادامه‌ی معاشناسی

در جلسه‌ی گذشته به معاشناسی منطق مرتبه‌ی اول پرداختیم. گفتیم که ترمهای زبان در ساختارها و با استفاده از نگاشتهایی که متغیرها را تعبیر می‌کنند، معنا می‌شوند. نیز گفتیم که هر نگاشت تعبیر، تابعی مانند

$$\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \rightarrow A$$

است که دامنه آن مجموعه‌ی متغیرهاست و برد آن جهان یک L ساختار \mathfrak{A} است. در این جلسه می‌خواهیم مفهوم «درست بودن یک فرمول» در یک ساختار را تعریف کنیم.

فرض کنید φ یک L فرمول، \mathfrak{A} یک L ساختار، β و یک نگاشت تعبیر متغیرها در A ، جهان ساختار \mathfrak{A} ، باشد. منظور از عبارت $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ این است که فرمول φ با ارزیابی β از متغیرها در ساختار \mathfrak{A} درست است. در زیر همین تعریف را دقیق کرده‌ایم.

تعریف ۱ (درست بودن یک فرمول در یک ساختار). عبارت $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ (که خوانده می‌شود: فرمول φ با ارزیابی β در ساختار \mathfrak{A} درست است) به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱.

$$\mathfrak{A} \models t_1 = t_2[\beta] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$$

یعنی فرمول $t_1 = t_2$ وقتی در ساختار \mathfrak{A} درست است که تعبیرهای ترمهای t_1, t_2 در این ساختار با هم برابر باشند؛

۲.

$$\mathfrak{A} \models R(t_1, \dots, t_n)[\beta] \Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$$

یعنی فرمول $R(t_1, \dots, t_n)$ وقتی در ساختار \mathfrak{A} درست است که تعبیرهای ترمهای t_i در این ساختار با یکدیگر رابطه‌ی $R^{\mathfrak{A}}$ را داشته باشند؛

$$\mathfrak{A} \models \neg \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta] \quad ۳.$$

۴.

$$\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi_1[\beta] \text{ و } \mathfrak{A} \models \psi_2[\beta]$$

۵. $\mathfrak{A} \models \exists x \psi[\beta]$ هرگاه یک عنصر $a \in A$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{A} \models \psi[\beta \frac{a}{x}]$ که در آن $\beta \frac{a}{x}$ یک نگاشت تعبیر متغیرهاست که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta \frac{a}{x}(v) = \begin{cases} \beta(v) & v \neq x \\ a & v = x \end{cases}$$

تعریف بالا را می‌توان برای سایر ادوات کمکی نیز به صورت زیر تعمیم داد: تعریف می‌کنیم $\mathfrak{A} \models (\psi_1 \rightarrow \psi_2)[\beta]$ هرگاه اگر $\mathfrak{A} \models \psi_1[\beta]$ آنگاه $\mathfrak{A} \models \psi_2[\beta]$. همچنین تعریف می‌کنیم $\mathfrak{A} \models \forall x \psi[\beta]$ هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\mathfrak{A} \models \psi[\beta \frac{a}{x}]$.

در ادامه به تعریف متغیرهای آزاد و پایبند پرداخته‌ایم. می‌گوییم متغیر x در فرمول φ آزاد است هرگاه x تحت تأثیر هیچ سوری قرار نگرفته باشد. بیایید این تعریف را به صورت دقیق و استقرایی بیان کنیم.

تعریف ۲ (متغیر آزاد). آزاد بودن حضور متغیر x در فرمول φ به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود:

۱. اگر $\varphi = (t_1 = t_2)$ در این صورت x برای φ آزاد است هرگاه $x \in \text{var}(t_1)$ یا $x \in \text{var}(t_2)$ (یعنی در صورتی که x یکی از متغیرهای به کار رفته در یکی از t_i ها باشد).

۲. اگر $\varphi = R t_1, \dots, t_n$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه x جزو متغیرهای های یکی از t_i ها باشد.

۳. اگر $\varphi = \neg \psi$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه ψ آزاد باشد.

۴. اگر $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه x در ψ_1 یا در ψ_2 آزاد باشد.

۵. اگر $\varphi = \exists y \psi$ آنگاه x در φ آزاد است هرگاه $x \neq y$ و x در ψ آزاد باشد.

متغیرهایی را که آزاد نباشند، پایبند می‌نامیم.

توجه ۳. تعداد متغیرهای آزاد یک فرمول φ همواره متناهی است.

مثال ۴. متغیرهای آزاد و پایبند را در فرمولهای زیر مشخص کنید.

$$\forall v. \left(\exists v_1 R(\overset{\text{پایبند}}{\uparrow} v, \overset{\text{پایبند}}{\uparrow} v_1) \wedge p(\overset{\text{آزاد}}{\uparrow} v_1) \right)$$

$$\forall x, y \quad R_1(\overset{\text{پایبند}}{\uparrow} x, \overset{\text{پایبند}}{\uparrow} y) \wedge R_2(\overset{\text{آزاد}}{\uparrow} x, \overset{\text{آزاد}}{\uparrow} y)$$

$$\forall x, y \quad \left(\overset{\text{پایبند}}{\uparrow} p(x) \wedge \overset{\text{پایبند}}{\uparrow} q(y) \right)$$

توجه ۵. برای دیدن مثال‌های بیشتر از متغیرهای آزاد و پایبند به جزوه مبانی ریاضی مدرس در تارنمای درسها مراجعه کنید.

لم ۶. اگر ارزیابی‌های A $\gamma, \beta : \{v_0, v_1, \dots\} \rightarrow A$ روی متغیرهای آزاد فرمول φ یکسان عمل کنند آنگاه

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$$

مثال ۷. فرض کنید $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$. ارزیابی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta : v_0 \mapsto 1$$

$$v_1 \mapsto 2$$

$$v_i \mapsto i \quad i \neq 1, 2$$

$$y \mapsto 6$$

$$\gamma : v_0 \mapsto 1$$

$$v_1 \mapsto 2$$

$$v_i \mapsto 1 \circ i \quad i \neq 1, 2$$

$$y \mapsto 1 \circ \circ \circ$$

حال فرمولهای $v \circ + v_1 = v_2$ و $(y^1 + 2y = \circ) \wedge (v \circ + v_1 = 2)$ را در نظر بگیرید. واضح است که

$$R \models v \circ + v_1 = v_2[\beta] \Leftrightarrow R \models v \circ + v_1 = v_2[\gamma]$$

$$R \models \exists y (y^1 + 2y = \circ) \wedge (v \circ + v_1 = 2)[\beta] \Leftrightarrow R \models \exists y (y^1 + 2y = \circ) \wedge (v \circ + v_1 = 2)[\gamma]$$

در مورد دوم دقت کنید که متغیرهای پایبند نقشی بازی نکرده‌اند.

اثبات لم ۶. حکم را با استقراء روی ساخت فرمولها ثابت می‌کنیم.

- اگر φ به صورت $t_1 = t_2$ باشد و β, γ روی متغیرهای به کار رفته در t_1 و t_2 هم ارزش باشند، آنگاه واضح است (و اگر واضح نیست تحقیق کنید) که

$$t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma].$$

- اگر φ به صورت Rt_1, \dots, t_n باشد و ارزشهای β, γ روی متغیرهای به کار رفته در t_i ها یکسان باشند، آنگاه

$$R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma]) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[\beta])$$

- بررسی حالت‌هایی را که $\varphi = \neg\psi$ و $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ به عنوان تمرین رها می‌کنم.

- اگر φ به صورت $\exists x\psi$ باشد و β و γ روی متغیرهای آزاد φ یکسان عمل کنند، آنگاه $\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta]$ هرگاه $a \in A$

موجود باشد به طوری که $\mathfrak{A} \models \psi[\beta \frac{a}{x}]$. حال مشاهده کنید که ارزیابی‌های $\gamma \frac{a}{x}$ و $\beta \frac{a}{x}$ روی متغیرهای آزاد ψ یکسان عمل می‌کنند؛ زیرا متغیرهای آزاد ψ با متغیرهای آزاد ϕ تنها احتمالاً در x متفاوتند و $\beta \frac{a}{x}, \gamma \frac{a}{x}$ روی همه‌ی متغیرها به غیر از x بنا به فرض یکسان عمل می‌کنند و روی x هم بنا به تعریف هر دو مقدار a دارند. پس بنا بر فرض استقراء

$$\mathfrak{A} \models \psi[\beta \frac{a}{x}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\gamma \frac{a}{x}].$$

$$\mathfrak{A} \models \exists x\psi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x\psi[\gamma]$$

□

دقت کنید که معمولاً در نمایش یک فرمول به صورت $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ متغیرهای پایبند آن را نمی‌نویسیم. به طور کلی:

توجه ۸. منظور از نماد $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ این است که

۱. متغیرهای x_i متمایز هستند.

۲. متغیرهای آزاد فرمول φ در میان $\{x_1, \dots, x_n\}$ هستند.

مثال ۹. در فرمول $\varphi(x, z) = \exists y (x + y = \circ)$ دقت کنید که با این که متغیر z در فرمول نیامده است، آن را در پرانتز نوشته‌ایم.

تعریف ۱۰. به فرمولی که متغیر آزاد نداشته باشد، جمله می‌گوئیم.

مثال ۱۱. فرمول زیر یک جمله در زبان حلقه‌هاست.

$$\forall a, b, c \exists x \quad ax^2 + bx + c = 0$$

بنابر لم قبلی اگر φ یک جمله باشد و β, γ دو تابع تعبیر برای متغیرها باشند آنگاه

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma].$$

بنابراین اگر φ یک جمله باشد، می‌نویسیم $\mathfrak{A} \models \varphi$ هرگاه برای یک β (به بیان معادل به ازای هر) ارزیابی β داشته باشیم $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$.

توجه ۱۲. اگر φ یک جمله و \mathfrak{A} یک ساختار باشد آنگاه $\mathfrak{A} \models \varphi$ یا $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ و هر دو اینها با هم نمی‌تواند رخ دهد (در داخل یک ساختار تناقضی نمی‌تواند رخ دهد).

تعریف ۱۳. فرض کنید x یک متغیر و s, t دو ترم باشند، منظور از نماد $t \frac{s}{x}$ این است که به جای متغیر x در ترم t ، ترم s را جایگذاری کنیم.

برای مثال

$$t(y) = 2y + 3 = 0$$

$$s = y^2 + y + x$$

$$t \frac{s}{y} = 2(y^2 + y + x) + 3 = 0$$

از آقای امیر نیک‌آبادی بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.