۱ جلسه ششم، ساختارها و تعبیر ترمها

یادآوری می‌کنم که یک زبان مرتبه‌ی اول مجموعه‌ای متشکل از **نمادهای** تابعی، **نمادهای** رابطه‌ای و **نمادهایی** برای ثوابت است. در جلسه‌ی قبل، برای یک زبان مرتبه‌ی اولِ L، مجموعه‌ی Lترم‌ها و Lفرمولها را تعریف کردیم. همانند ترمها، فرمولهای مرتبه‌ی اول نیز به طور یکتا خوانش می‌شوند (اثبات قضیه‌ی زیر را به عهده‌ی شما می‌گذارم):

قضیه ۱ (خوانش یکتای Lفرمول ها)**.** اگر φ یک Lفرمول باشد، از یکی از حالات زیر خارج نیست:

۱. φ به صورت $t_1 = t_2$ است که در آن t_1 و t_2 دو Lترم هستند.

۲. φ به صورت $Rt_1 \cdots t_n$ است که در آن $t_1, \cdots, t_n$ خودْ Lترم هستند.

۳. φ به صورت $\neg\psi$ است که در آن ψ یک Lفرمول است.

۴. φ به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ است که در آن ψ_1 و ψ_2 در L فرمول هستند.

۵. φ به صورت $\exists x \quad \psi$ است که در آن ψ یک L فرمول است.

در موارد بالا ترم‌های t_i و فرمول‌های ψ_2 ، ψ_1 و ψ به طور یکتا مشخص می‌شوند.

علاوه بر آنچه در بالا به عنوان فرمول ساخته می‌شود، از کوتاه‌نوشتهای زیر نیز استفاده می‌کنیم.

$$\psi_1 \vee \psi_2 = \neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$$
$$\psi_1 \rightarrow \psi_2 = (\neg\psi_1 \vee \psi_2)$$
$$\forall x \quad \psi = \neg(\exists x \quad \neg\psi)$$
$$\psi_1 \longleftrightarrow \psi_2 = (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$$
$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n = ((\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \psi_3) \wedge \cdots$$

معمولاً به جای Rt_1t_2 می نویسیم $R(t_1, t_2)$ یا t_1Rt_2. نیز به جای $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \quad \psi$ می نویسیم $\exists x_1 \ldots x_n \quad \psi$. هر چند در تعریف فرمول‌ها وضعیت پرانتزها کاملاً مشخص است و فرمول‌ها به طور یکتا خوانش می‌شوند، در مصارف روزمره‌ی ریاضی از پرانتزهای بیشتری برای خوانش آسانتر فرمولها استفاده می‌شود. این پرانتزها طبق اولویت‌های زیر حذف می‌شوند.
اولویت‌های نمادهای منطقی

$$(,)$$
$$\neg \quad \exists \quad \forall$$
$$\wedge \quad \vee$$
$$\rightarrow \quad \leftrightarrow$$

در هر کدام از طبقات بالا، ظهور زودتر، به نماد اولیت می‌دهد.

مثال ۲. فرمول $\neg\varphi \wedge \psi \to x$ به صورت زیر پرانتزگذاری می‌شود:

$$\big((\neg\varphi) \wedge \psi\big) \to x$$

مثال ۳. دو فرمول زیر با هم تفاوت دارند.

$$\text{۱} \quad \forall x \quad \varphi \wedge \psi \to x$$

$$\text{۲} \quad \forall x \quad (\varphi \wedge \psi \to x)$$

فرمول اولی به صورت زیر پرانتزگذاری می‌شود:

$$((\forall x \phi) \wedge \psi) \to x.$$

برای مرور مبحث پرانتزگذاری، مثال‌های بیشتر را در جزوه‌ی مبانی ریاضی (در تارنمای درسهای من) مطالعه بفرمایید.

تمرین ۱. فرمول‌های زیر را پرانتز گذاری کنید.

۱. $\forall x \quad R_{۱}(x,y) \to \exists y \quad S(y) \vee R_{۲}(x,y)$

۲. $R(x,y) \iff \exists x \quad R(x,y) \wedge \forall y \quad S(x) \vee \forall y \quad R(x,y)$

مثال ۴. صورت کلی فرمولهای بدون سور در زبان حلقه‌ها به صورت زیر است (در صورت نرمال فصلی)

$$\big(f_{۱}(x_{۱},\dots,x_n) = ۰ \wedge f_{۲}(x_{۱},\dots,x_n) \neq ۰ \wedge \dots \wedge f_n(x_{۱},\dots,x_n) = ۰\big) \vee$$
$$\big(g_{۱}(x_{۱},\dots,x_n) = ۰ \wedge g_{۲}(x_{۱},\dots,x_n) \neq ۰ \wedge \dots g_n(x_{۱},\dots,x_n) = ۰\big) \vee \dots$$

دقت کنید که چندجمله‌ایهای بالا با ضرایب در اعداد صحیح هستند (در واقع فرمولهای بدون سور در زبان حلقه‌ها، دقیقاً ورایته‌ها (چندگوناها) ی جبری را مشخص می‌کنند.

تمرین ۲. فرمول‌های بدون سور را در زبان $L = \{+, ۰, ۱\}$ پیدا کنید. چند نمونه در زیر آمده است:

$$x + ۱ = ۰$$

$$x + x + ۱ = ۰$$

$$nx + my = ۰$$

مثال ۵. اگر از سورها استفاده کنیم، در زبان بالا جواب داشتن یک دستگاه معادلات خطی را می‌توان با یک فرمول نوشت.

$$\exists x \exists y \quad (mx + ny = ۰ \wedge m'x + n'y = ۰)$$

۱.۱ معناشناسی در منطق مرتبه‌ی اول

روش معناشناسی در منطق مرتبه‌ی اول، به معناشناسی در زبان طبیعی نزدیک است. برای مثال برای بررسی درستی جمله‌ی «کتاب روی میز است» باید نخست باید یک جسم فیزیکی به نام کتاب و یک جسم فیزیکی به نام میز، و یک رابطه بین آنها یعنی «واقع شدن یکی بر دیگری» را داشته باشیم. یعنی نه تنها اسامی را تعبیر می‌کنیم بلکه روابط میان آنها را نیز تعبیر می‌کنیم. در واقع در ذهن ما یک تابع «تعبیر» وجود دارد که کلمه‌ی کتاب را به شیء کتاب تصویر می‌کند. معناشناسی منطق مرتبه‌ی اول نیز به صورتی مشابه (البته بسیار دقیقتر) است.

فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. یک L**ساختارِ** $\mathfrak{A}$ از یک مجموعه‌ی A (به نام جهانِ Lساختارِ $\mathfrak{A}$) تشکیل شده است و از موارد زیر:

۱. برای هر نمادِ ثابت $c \in L$ یک عنصرِ مشخصِ $\overset{\mathfrak{A}}{c} \in A$ (که به آن تعبیر ثابت c در ساختارِ $\mathfrak{A}$ می‌گوییم)

۲. برای هر نماد تابعیِ nموضعیِ $f \in L$ یک تابعِ

$$\overset{\mathfrak{A}}{f} \colon A^n \to A$$

(که به آن تعبیر نماد تابعیِ f در ساختارِ $\mathfrak{A}$ گفته می‌شود)، و

۳. برای هر نماد رابطه‌ای nموضعیِ $R \in L$ یک رابطه‌ی $\overset{\mathfrak{A}}{R}$ روی A (که بدان تعبیر رابطه‌ی R در ساختارِ $\mathfrak{A}$ گفته می‌شود).

یک Lساختارِ $\mathfrak{A}$ را معمولاً به همراه توابع، روابط و ثوابت آن به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\mathfrak{A} = (A, \{\overset{\mathfrak{A}}{c}, \overset{\mathfrak{A}}{f}, \overset{\mathfrak{A}}{R}\}) \quad f, c, R \in L$$

دقت کنید که در یک Lساختار، در واقع تمام نمادهای زبان، دارای یک مابازاء هستند.

مثال ۶. $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, ۰)$ یک Lساختار است که در آن

$$L = \{+, ۰\}.$$

مثال ۷. $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, ۰, ۱, \leq)$ یک Lساختار است که در آن

$$L = \{+, \cdot, ۰, ۱, <\}$$

مثال ۸. اگر $L = \{ \overset{\text{دو موضعی}}{\overset{\uparrow}{R}} \}$ آنگاه هر گراف G یک Lساختار است. در ساختارِ $\mathfrak{G} = (G, \overset{\mathcal{G}}{R})$ رابطه‌ی R را به صورت زیر «تعبیر» می‌کنیم:

$$\overset{\mathcal{G}}{R}(u, v) \iff \text{u به v وصل باشد}$$

حال که با Lساختارها، به عنوان جهان‌هایی که قرار است وقایع در آنها رخ دهند، آشنا شدیم، به تعبیر ترمها و فرمولها در Lساختارها می‌پردازیم.

تعریف ۹. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک Lساختار باشد. منظور از **یک نگاشت تعبیر**، تابعی مانند

$$\beta : \{v_0, v_1, \ldots\} \to A$$

است. دامنه‌ی این تابع، مجموعه‌ی متغیرهاست و بُردِ آن جهان Lساختارِ $\mathfrak{A}$ است.

در یک ساختار، باید بتوان «معنای عینی کلمات» را پیدا کرد:

تعریف ۱۰ (تعبیر ترمها)**.** فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک Lساختار، β یک تابع تعبیر مانند تعریف بالا و t یک Lترم باشند. **تعبیر ترم** t **در ساختارِ** $\mathfrak{A}$ **با نگاشت تعبیرِ** β که آن را با $\overset{\mathfrak{A}}{t}[\beta]$ نشان می‌دهیم، به صورت استقرائیِ زیر تعریف می‌شود:

۱. اگر $t = v$ یک متغیر باشد، قرار می‌دهیم $\overset{\mathfrak{A}}{t}[\beta] = \beta(v_i)$ (در واقع، متغیرها را خودِ تابع تعبیر، تعبیر کرده است!)

۲. اگر $t = c$ یک ثابت باشد، قرار می‌دهیم: $\overset{\mathfrak{A}}{t}[\beta] = \overset{\mathfrak{A}}{c}$

۳. اگر تعبیر ترم‌های $t_1, \ldots, t_n$ را در Lساختارِ $\mathfrak{A}$ بدانیم آنگاه $f(t_1, \ldots, t_n)$ را به صورت زیر تعبیر می‌کنیم:

$$f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n)[\beta] = \overset{\mathfrak{A}}{f}(\overset{\mathfrak{A}}{t_1}[\beta], \ldots, \overset{\mathfrak{A}}{t_n}[\beta])$$

مثال ۱۱. تعبیرِ ترم $v_0 v_2 v_0 + v_0 v_1$ با تابع تعبیرِ

$$v_0 \to 1$$
$$v_2 \to 2$$
$$v_1 \underset{\beta}{\to} 4$$

در ساختار $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ به صورت زیر است:

$$(v_0 v_2 v_0 + v_0 v_1)^{\mathfrak{R}}[\beta] = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6$$

توجه ۱۲. وقتی می‌نویسیم $t(x_1, \ldots, x_n)$ منظورمان دو چیز است:

۱. x_iها متغیرهایی متمایز هستند.

۲. متغیرهای استفاده شده در ترم t از میان $x_1, \ldots, x_n$ هستند؛ به بیان دیگر

$$var(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$$

که در آن با $var(t)$ مجموعه‌ی متغیرهای به کار رفته در ترم t را نشان داده‌ایم. دقت کنید که شاید همه‌ی متغیرهای بالا در این ترم به کار نرفته باشند.