# ۱ جلسه‌ی ششم، روش انتاج

در جلسه‌ی قبل دیدیم که هر گزاره را در منطق گزاره‌ها می‌توان به صورت نرمال فصلی [1] نوشت؛ یعنی به صورت زیر

$$\bigvee_{i=1}^{n} c_i$$

$$c_i = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$$

$$q_i = p_i \text{یا} \quad q_i = \neg p_i$$

در زیر روشی به نام «روش انتاج» [2] معرفی کرده‌ایم که توسط آن تشخیص تاتولوژی بودن این گونه گزاره‌ها نسبتاً سریع صورت می‌گیرد. (یادمان باشد که در حالت کلی، وجود روشی سریع برای تاتالوژی بودن یک گزاره، معادل با مسئله‌ی $p = np$ است).

## ۱.۱ روش انتاج

پیش از آن وارد بحث شویم دقت کنید که گزاره‌ی $p \vee \neg p$ بوضوح یک تاتولوژی است. روش انتاج بر یک مشاهده‌ی ساده استوار است که در مثال بعد بدان اشاره کرده‌ایم.

**مثال ۱.** اگر $Q, Q'$ گزاره‌های دلخواهی باشند به طوری که $Q \wedge Q'$ تاتولوژی باشد، آنگاه $(\overset{\text{اتمی}}{\overset{\uparrow}{p}} \wedge \overset{\text{دلخواه}}{\overset{\uparrow}{Q}}) \vee (\neg p \wedge Q')$ یک تاتولوژی است. (اثبات کنید).

فرض کنید $\bigvee c_i$ گزاره‌ای در صورت نرمال فصلی باشد. هر $c_i = q_1 \wedge \ldots \wedge q_n$ را نخست به صورت مجموعه‌ای بنویسید؛ یعنی قرار دهید:

$$c_i = \{q_1, \ldots, q_n\}$$

دقت کنید که هر $q_i$ یا اتمی است یا نقیض اتمی. به هر $c_i$ (که به صورت مجموعه‌ای نوشته شده باشد) یک «عبارت» می‌گوییم. همچنین هر $q_i$ را یک «کلمه» در این عبارت می‌خوانیم. بیایید مجموعه‌ی همه‌ی عبارات به کار رفته در $\phi$ را به صورت زیر نشان دهیم:

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$$

**تعریف ۲.** اگر $c_1 = \{p\} \cup Q$ و $c_2 = \{\neg p\} \cup Q'$ دو عبارت باشند، آنگاه $Q \cup Q'$ را یک **مُنتَج** از $c_1$ و $c_2$ می‌خوانیم.

**مثال ۳.** مجموعه‌ی $\emptyset$ منتجِ عباراتِ $\{p\} \cup \emptyset$ و $\{\neg p\} \cup \emptyset$ است.

**قضیه ۴** (انتاج)**.** گزاره‌ی $\varphi$، که در حالت نرمالِ فصلی نوشته شده است، یک تاتولوژی است **اگر و تنها اگر** با ایجاد متوالیِ منتجها در روش انتاج در جایی به مجموعه‌ی $\emptyset$ برسیم.

پیش از آن که قضیه‌ی بالا را اثبات کنیم، نحوه‌ی استفاده از آن را در چند مثال بررسی می‌کنیم.

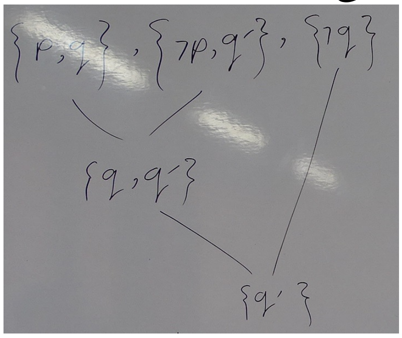
**مثال ۵.** با روش انتاج بررسی کنید که عبارت زیر تاتولوژی است یا خیر.

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q') \vee \neg q$$

[1] DNF

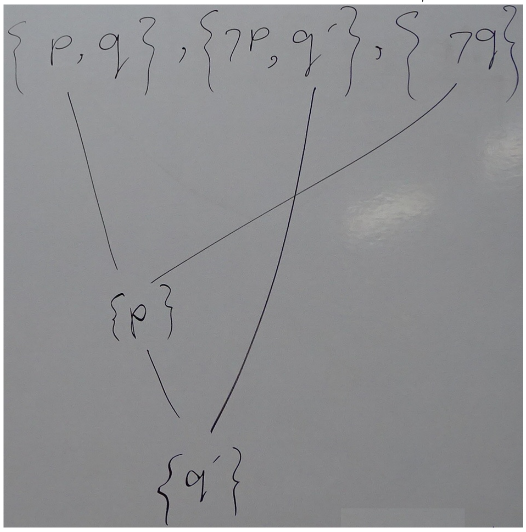
[2] Resolution Method

*پاسخ.* روش اول.




پس گزاره‌ی فوق تاتولوژی نیست.

روش دوم.



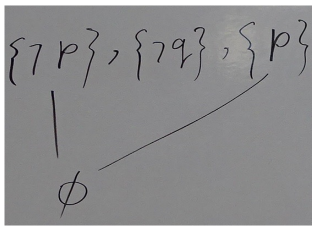

پس با این روش نیز گزاره‌ی فوق تاتولوژی نیست. □

**مثال ۶.** با استفاده از روش انتاج تاتولوژی بودن عبارت زیر را بررسی کنید.

$$p \to (q \to p)$$

*پاسخ.*

$$p \to (q \to p) \equiv \neg p \vee (q \to p) \equiv \neg p \vee (\neg q) \vee p$$




درنتیجه گزاره‌ی بالا تاتولوژی است. □

**تمرین ۱.** با استفاده از روش انتاج نشان دهید گزاره‌های زیر تاتولوژی هستند.

$$\big((p \to q) \wedge (\neg p \to q)\big) \to q$$

$$\neg\neg A \to A$$

*اثبات قضیه‌ی انتاج.* نخست نشان می‌دهیم که اگر با به کارگیری روش انتاج برای گزاره‌ی $\varphi$ به تهی برسیم، گزاره‌ی $\varphi$ تاتولوژی است. دقت کنید که اگر $\mathcal{C}'$ یک مجموعه از **عبارات** باشد که پس از یک مرحله انتاج از $\mathcal{C}$ به دست آمده است، آنگاه اگر گزاره‌ی متناظر با $\mathcal{C}'$ تاتولوژی باشد، آنگاه گزاره‌ی متناظر با $\mathcal{C}$ نیز تاتولوژی است. به بیان ساده‌تر اگر $(Q \wedge Q') \vee \psi$ تاتولوژی باشد آنگاه

$$(p \wedge Q) \vee (\neg p \wedge Q') \vee \psi$$

که در مرحله‌ی قبل قرار دارد، تاتولوژی است. تمرین زیر را در پرانتز در نظر بگیرید:

**تمرین ۲.** آیا عکس این گفته نیز برقرار است؟ یعنی اگر $(p \wedge Q) \vee (\neg p \wedge Q')$ تاتولوژی باشد آیا $Q \wedge Q'$ تاتولوژی است؟

همچنین دقت کنید که اگر با به کار گیری روش انتاج در جائی به تهی برسیم، حتماً در مرحله‌ی قبل از آن عبارتی به صورت زیر داشته‌ایم:

$$(p) \vee (\neg p) \vee \psi$$

که این گزاره نیز تاتولوژی است. پس برای راحتی $\emptyset$ را یک تاتولوژی می‌نامیم و گفته‌های بالا را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

**اگر جمله‌ای که پس از یک مرحله از انتاج به دست بیاید تاتولوژی باشد، جمله‌ی مرحله‌ی قبلی (یعنی قبل از انتاج) تاتولوژی بوده است.** پس اگر در جایی به تهی برسیم یعنی در همه‌ی مراحلِ قبل تاتولوژی داشته‌ایم، و به ویژه گزاره‌ای که با آن آغاز کرده‌ایم تاتولوژی بوده است.

حال باید حکم سختتر را ثابت کنیم. یعنی این را ثابت کنیم که اگر گزاره‌ی مورد نظر تاتولوژی باشد با اعمال روش انتاج به آن حتماً به تهی می‌رسیم. این حکم را می‌خواهیم با استقراء روی اتمهای به کار رفته در گزاره‌ی مورد نظرمان ثابت کنیم.

فرض کنید گزاره‌ی $\varphi$ تاتولوژی باشد. فرض کنید گزاره‌ی $\varphi|_{p=T}$ گزاره‌ای باشد که با قرار دادن $T$ به جای $p$ از گزاره‌ی $\varphi$ بدست آید. مثلاً اگر

$$\varphi = \underbrace{(p \wedge Q)}_{T \wedge Q = Q} \vee \underbrace{(\neg p \wedge Q')}_{\cancel{\bot \wedge Q'}} \vee (r \wedge r')$$

آنگاه

$$\varphi|_{p=T} = Q \vee (r \wedge r')$$

همچنین فرض کنید $\varphi'|_{p=T}$ گزاره‌ای باشد که با حذف عبارت شاملِ نقیضِ $p$ در $\varphi$ به دست آید. در مثال بالا داریم

$$\varphi'|_{p=T} = (p \wedge q \wedge r) \vee (r_1 \wedge r_2 \wedge p).$$

مشاهده کنید که

- تعداد اتمهای به کار رفته در هر دو گزاره‌ی $\varphi|_{p=T}, \varphi'|_{p=T}$ از تعداد اتمهای به کار رفته در $\phi$ کمتر است.

- از آنجا که $\phi$ تاتولوژی است گزاره‌ی $\varphi|_{p=T}$ نیز تاتولوژی است (واضح است؛ زیرا ارزش $\phi$ به ارزش $p$ بستگی ندارد).

- فرض کنید که بدانیم که اگر روش انتاج را برای گزاره‌ی $\varphi|_{p=T}$ به کار ببریم، به تهی برسیم؛ آنگاه اگر این روش را برای گزاره‌ی $\varphi'|_{p=T}$ به کار ببریم یا به تهی می‌رسیم یا به $\{p\}$. علت این است که عباراتِ به کار رفته در گزاره‌ی $\varphi'|_{p=T}$ تنها در داشتن یا نداشتنِ $p$ با عبارات به کار رفته در $\varphi|_{p=T}$ تفاوت دارند.

حال به طور مشابه فرض کنید گزاره‌ی $\varphi|_{p=F}$ گزاره‌ای باشد که با قرار دادن $F$ به جای $p$ از گزاره‌ی $\varphi$ بدست آید (یعنی با فرض این که $p$ غلط است). همچنین فرض کنید $\varphi'|_{p=F}$ گزاره‌ای باشد که با حذف عبارت شاملِ $p$ در $\varphi$ به دست آید. دوباره مشاهدات مشابهی داریم:

- تعداد اتمهای به کار رفته در هر دو گزاره‌ی $\varphi|_{p=F}, \varphi'|_{p=F}$ از تعداد اتمهای به کار رفته در $\phi$ کمتر است.
- از آنجا که $\phi$ تاتولوژی است گزاره‌ی $\varphi|_{p=F}$ نیز تاتولوژی است (واضح است؛ زیرا ارزش $\phi$ به ارزش $p$ بستگی ندارد).
- فرض کنید که بدانیم که اگر روش انتاج را برای گزاره‌ی $\varphi|_{p=F}$ به کار ببریم، به تهی برسیم؛ آنگاه اگر این روش را برای گزاره‌ی $\varphi'|_{p=F}$ به کار ببریم یا به تهی می‌رسیم یا به $\{\neg p\}$. علت این است که عباراتِ به کار رفته در گزاره‌ی $\varphi'|_{p=F}$ تنها در داشتن یا نداشتنِ $\neg p$ با عبارات به کار رفته در $\varphi|_{p=F}$ تفاوت دارند.

حال از آنجا که گزاره‌های $\varphi|_{p=F}$ و $\varphi|_{p=F}$ تاتولوژی هستند و از گزاره‌ی $\phi$ کوچکترند، بنا به فرض استقرا، با اعمال روش انتاج به هر کدام از آنها به تهی می‌رسیم. از طرفی بنا به مشاهدات بالا، با اعمال روش انتاج به هر یک از گزاره‌های $\varphi'|_{p=T}, \varphi'|_{p=F}$ یا به تهی می‌رسیم یا حالاتی که در بالا شرح داده شد رخ می‌دهد. دقت کنید که

$$\varphi = \varphi'|_{p=T} \vee \varphi'|_{p=F}$$

حال اگر با اعمال روش انتاج به یکی از $\varphi'|_{p=T}, \varphi'|_{p=F}$ به تهی برسیم، یعنی با اعمال انتاج به $\varphi$ به تهی رسیده‌ایم و حکم ثابت می‌شود. اگر با اعمال انتاج در هیچکدام از آنها به تهی نرسیم یعنی در یکی به $\{p\}$ و در دیگری به $\{\neg p\}$ رسیده‌ایم. حال با یک بار دیگر به کار گیریِ انتاج، به تهی می‌رسیم. $\square$